Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация
"Академия технологии и управления"
(АНПОО "Академия технологии и управления")

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

учебной дисциплины

ЕН.02 МАТЕМАТИКА

для специальности 31.02.01Лечебное дело

Новочебоксарск

Разработана на основе федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 31.02.01 Лечебное дело, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 12.05.2014 № 514

Утверждена в составе ППССЗ по специальности 31.02.01 Лечебное дело

Организация - разработчик: АНПОО «Академия технологии и управления»

ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Фонд оценочных средств предназначен для проверки результатов освоения учебной дисциплины ЕН.02 Математика основной профессиональной образовательной программы по специальности 31.02.01 Лечебное дело.

В результате освоения учебной дисциплины ЕН.02 Математика обучающийся должен

уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

знать:

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
- основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления.

В результате изучения дисциплины обучающийся осваивает общие компетенции (ОК):

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения возложенных на него профессиональных задач, а также для своего профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 12. Организовывать рабочее место с соблюдением требований охраны труда, производственной санитарии, инфекционной и противопожарной безопасности.

Должен обладать профессиональными компетенциями, соответствующими видам деятельности:

ПК 1.2. Проводить диагностические исследования.

ПК 1.3. Проводить диагностику острых и хронических заболеваний.

ПК 1.4. Проводить диагностику беременности.

ПК 1.5. Проводить диагностику комплексного состояния здоровья ребёнка.

ПК 1.7. Оформлять медицинскую документацию.

ПК 2.1. Определять программу лечения пациентов различных возрастных групп.

ПК 2.2. Определять тактику ведения пациента.

ПК 2.3. Выполнять лечебные вмешательства.

ПК 2.4. Проводить контроль эффективности лечения.

ПК 2.5. Осуществлять контроль состояния пациента.

ПК 2.8. Оформлять медицинскую документацию.

ПК 3.1. Проводить диагностику неотложных состояний.

ПК 3.2. Определять тактику ведения пациента.

ПК 3.3. Выполнять лечебные вмешательства по оказанию медицинской помощи на догоспитальном этапе.

ПК 3.4. Проводить контроль эффективности проводимых мероприятий.

ПК 3.5. Осуществлять контроль состояния пациента.

ПК 3.7. Оформлять медицинскую документацию.

ПК 4.1. Организовывать диспансеризацию населения и участвовать в ее проведении.

ПК 4.2. Проводить санитарно – противоэпидемические мероприятия на закрепленном участке.

ПК 4.3. Проводить санитарно – гигиеническое просвещение населения.

ПК 4.4. Проводить диагностику групп здоровья.

ПК 4.5. Проводить иммунопрофилактику.

ПК 4.6. Проводить мероприятия по сохранению и укреплению здоровья различных возрастных групп населения.

ПК 4.9. Оформлять медицинскую документацию.

ПК 6.1. Рационально организовывать деятельность персонала с соблюдением психологических и этических аспектов работы в команде.

ПК 6.2. Планировать свою деятельность на фельдшерско-акушерском пункте, в здравпункте промышленных предприятий, детских дошкольных учреждениях, центрах общей врачебной (семейной) практики и анализировать ее эффективность.

ПК 6.3. Вести медицинскую документацию.

ПК 6.4. Организовывать и контролировать выполнение требований противопожарной безопасности, техники безопасности и охраны труда на ФАПе, в здравпункте промышленных предприятий, детских дошкольных учреждениях, центрах офисе общей врачебной (семейной) практики.

Формой промежуточной аттестации по учебной дисциплине является экзамен.

Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке:

№ п/п	Назначение фонда оценочных средств	Контролируемые дидактические единицы	Вид оценочных материалов	Результат
1.	Текущий контроль	- понятие: пропорции, процента, единицы измерения, - виды единиц измерения, цена деления	Практическая работа №1,2	Знает: понятие: пропорции, процента, единицы измерения, - виды единиц измерения, цену деления.
2.	Текущий контроль	– понятие числовой последовательности, – способы задания последовательности, – понятие предела последовательности, – основные свойства пределов	Практические занятия №3,4	Знает: – понятие числовой последовательности, – способы задания последовательности, – понятие предела последовательности, – основные свойства пределов; Умеет: – составлять формулы задания последовательностей, – вычислять пределы последовательностей – применять основные свойства последовательностей при решении практических задач
3.	Текущий контроль	– приращения аргумента и функции; – производная функции, физический и геометрический смыслы производной; – построение графика функции с помощью производной – уравнение касательной к графику функции; – наибольшее и наименьшее значение функции; – производная в физике.	Практические занятия №5,6	Знает: – определения приращения аргумента и функции; – понятие о производной функции, физическом и геометрическом смысле производной; – исследовать и построить график функции с помощью производной – уравнение касательной к графику функции; – наибольшее и наименьшее значение функции; – производная в физике. Умеет: – находить производные элементарных функций; – использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков; – применять производную

				для проведения приближенных вычислений, решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения; – использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для: решения прикладных задач, в том числе социально-экономических и физических, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения.
4.	Текущий контроль	– первообразная и определенный интеграл; – правила вычисления первообразной; – формула Ньютона – Лейбница;	Практические занятия № 7,8	Знает: – понятие первообразной и определенного интеграла; – правила вычисления первообразной; – формула Ньютона – Лейбница; Умеет: – находить первообразные; – вычислять определенный интеграл и площади криволинейной трапеции; – – работать справочным материалом; – действовать по алгоритму
5.	Текущий контроль	о классификации дифференциальных уравнений (ДУ) о принципах построения аналитических решений обыкновенных дифференциальных уравнений об исследовании дифференциальных уравнений с параметром методами асимптотических разложений о построении разностных схем решения краевых задач и задач Коши о применении вариационных методов для решения краевых задач	Практическая работа №9-11	основные типы дифференциальных уравнений и методы их решения методы решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений (ЛСДУ) основные принципы теории устойчивости систем дифференциальных уравнений (СДУ) методы интегрирования дифференциальных уравнений при помощи рядов методы решения краевых задач с помощью функции Грина методы определения собственных значений и собственных функций дифференциального

				оператора методы теории возмущений методы решения уравнений в частных производных первого порядка численные методы решения начальной задачи разностные и вариационные методы решения краевых задач
6.	Текущий контроль	определять сходимость ряда; представлять функцию в виде степенного ряда; применять ряды для приближенных вычислений.	Практические занятия №12	понятие числового ряда; понятие сходимости ряда; необходимый признак сходимости ряда; Достаточные признаки сходимости ряда; понятие функционального ряда; разложение функции в степенной ряд Тейлора.
7.	Текущий контроль	Методы вычисления определителей. Понятие матрицы. Виды матриц. Невырожденная матрица. Линейные операции над матрицами.	Практические работы № 12,13	Свойства линейных операций над матрицами. Произведение матриц. Свойства умножения матрицы на матрицу. Необходимое и достаточное условие существования матрицы, обратной данной.Алгоритмы нахождения матрицы, обратной данной. Определители взаимно – обратных матриц. Ранг матрицы. Способы нахождения ранга матрицы. Система линейных алгебраических уравнений. Основные понятия и определения. Решение системы.
8.	Текущий контроль	− перестановка, размещение и сочетание; − формула бинома Ньютона; − элементы комбинаторики − метод перебора, − анализ реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков.	Практические занятия №14,15,16	Знает: – определение перестановок, размещений и сочетаний; – определение факториала и вычисление его значения; – метод перебора − анализ реальных числовых данных, представленных в виде

				диаграмм, графиков. Умеет использовать: – при решении практических задач представления о перестановках, размещениях и сочетаниях; – формулу бинома Ньютона; – элементы комбинаторики – при решении простейших комбинаторных задач метод перебора, а также с известные формулы; – анализ реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков.
9.	Промежуточная аттестация в форме экзамена	Требования к результатам освоения учебной дисциплины «Математика» в соответствии с ФГОС среднего общего образования по специальности 31.02.01 Лечебное дело от 12.05.2014 г. N 514	Программа проведения промежуточной аттестации в форме экзамена	Соответствие уровня подготовки обучающегося требованиям ФГОС среднего общего образования ОК 1 - 5, 12 ПК 1.2 - 1.5, 1.7, 2.1 - 2.5, 2.8, 3.1 - 3.5, 3.7, 4.1 - 4.6, 4.9, 6.1 - 6.4

Контрольная работа
Вариант 1

1.Линейная алгебра

Вычислить определители

1.1 $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ 1.2 $\begin{vmatrix} -2 & -8 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$ 1.3 $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

Решить системы уравнений

1.4 $\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 4x - y = 14 \end{cases}$ 1.5 $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ x + 5y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$

2.Аналитическая геометрия

Заданы точки A(-1, 2), B(0, −2), C(5, 1). Требуется:

2.1 Начертить треугольник ABC .

2.2 Найти координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$

2.3 Найти длины сторон AB, AC , BC

2.4 Найти углы треугольника.

2.5 Найти площадь треугольника ABC .

2.6 Составить уравнения прямых AB, AC , BC .

3.Пределы. Производная.

Вычислить пределы

3.1 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4x^2 - 11x - 3}{3x^2 - 8x - 3}$ 3.2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + 2x + x^3}{10x^3 + x^2 - 80}$

3.3 Найти производную функции $y=(2x^3 - 5x)\cdot \sin x$

3.4 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

У= $3x^2 + 12x - 7$ [-3; 0]

3.5 Исследовать функцию и построить график $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 6$

4.Интеграл. Дифференциальные уравнения.

Вычислить интегралы

4.1 $\int x(x+1)(5x-3)dx$

4.2 $\int_{-1}^{2} 4x(x-3)(2x+7)dx$

4.3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: параболой $y=x^2+1$, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и осью абсцисс

Решить дифференциальные уравнения

4.4 (У-1)dx – (X+2)dy =0

4.5 Y’’-Y’-12Y=0

5. Теория вероятности и математическая статистика.

5.1 На экзамен вынесено 60 вопросов, Андрей не выучил 3 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный вопрос.

5.2 При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм.

5.3 Распределение рабочих АО по уровню ежемесячной оплаты труда

Группы рабочих по опла труда, тыс.руб.	до 8	8 - 9	9 - 10	10 - 11	11 - 12	12 и более
Число рабочих, чел.	5	15	20	30	16	14

Определить средний уровень оплаты труда

5.4 Составить закон распределения числа поражений мишени из 3 выстрелов, если вероятность поражения при каждом выстреле равна 0,8.Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

5.5 Среднемесячная зарплата за вычетом налогов составила 10000рублей в базисном году и 12000 рублей в отчетном году. Потребительские цены повысились в отчетном году по сравнению с базисным в 1,5 раза. Рассчитайте индекс покупательной способности денег, индекс номинальной зарплаты и индекс реальной зарплаты.

Контрольная работа
Вариант 2

1.Линейная алгебра

Вычислить определители

1.1 $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ 1.2 $\begin{vmatrix} -2 & -8 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$ 1.3 $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{vmatrix}$

Решить системы уравнений

1.4 $\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 4x - y = -17 \end{cases}$ 1.5 $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ 2x + 10y + 4z = 10 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$

2.Аналитическая геометрия

Заданы точки A(0, 3), B(-1, −1), C(4, 1). Требуется:

2.1 Начертить треугольник ABC .

2.2 Найти координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$

2.3 Найти длины сторон AB, AC , BC

2.4 Найти углы треугольника.

2.5 Найти площадь треугольника ABC .

2.6 Составить уравнения прямых AB, AC , BC .

3.Пределы. Производная.

Вычислить пределы

3.1 $\lim_{x\to 2} \frac{4x^2-6x-4}{3x^2-5x-2}$ 3.2 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3-5x-9x^3}{10x^3-6x-9}$

3.3 Найти производную функции $y=(2x^4 - 5x)\cdot\sin x$

3.4 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

У= $3x^2 + 18x - 7$ [-4; 0]

3.5 Исследовать функцию и построить график $y = 2x^3 - 3x^2 + 6$

4.Интеграл. Дифференциальные уравнения.

Вычислить интегралы

4.1 $\int x(2x+1)(5x-3)dx$

4.2 $\int_{-1}^{2} 4x(2x-3)(2x+7)dx$

4.3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: параболой $y=x^2+1$, прямыми $x = -1$, $x = 1$ и осью абсцисс

Решить дифференциальные уравнения

4.4 (У-5)dx – (Х+3)dy =0

4.5 Y’’-Y’-6Y=0

5. Теория вероятности и математическая статистика.

5.1 На экзамен вынесено 60 вопросов, Андрей не выучил 6 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный вопрос.

5.2 При изготовлении подшипников диаметром 65 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,964. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 64,99 мм или больше чем 66,01 мм.

5.3 Распределение рабочих АО по уровню ежемесячной оплаты труда

Группы рабочих по оплате труда, тыс.руб.	до 8	8 - 9	9 - 10	10 - 11	11 - 12	12 и более
Число рабочих, чел.	6	15	19	28	18	14

Определить средний уровень оплаты труда

5.4 Составить закон распределения числа поражений мишени из 5 выстрелов, если вероятность поражения при каждом выстреле равна 0,7.Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

5.5 Среднемесячная зарплата за вычетом налогов составила 10000рублей в базисном году и 12000 рублей в отчетном году. Потребительские цены повысились в отчетном году по сравнению с базисным на 30%. Рассчитайте индекс покупательной способности денег, индекс номинальной зарплаты и индекс реальной зарплаты.

Приложение 1

Практические занятия №1

Расчёт процентной концентрации раствора.

Задача № 1. Определите цену деления шприца, если от подигольного конуса до цифры «1» - 10 делений.

Решение: Для определения цены деления шприца, необходимо цифру «1» разделить на количество делений 10.

$$\frac{1}{10} = 0,1 мл.$$

Ответ: цена деления шприца равна 0,1 мл.

Задача № 2. Определите цену деления шприца, если от подигольного конуса до цифры «5» - 10 делений.

Решение: Для определения цены деления шприца, необходимо цифру «5» разделить на количество делений 10.

$$\frac{5}{10} = 0,5 мл.$$

Ответ: цена деления шприца равна 0,5 мл.

Задача № 3. Определите цену деления шприца, если от подигольного конуса до цифры «5» - 5 делений.

Решение: Для определения цены деления шприца, необходимо цифру «5» разделить на количество делений 5.

$$\frac{5}{5} = 1 мл.$$

Ответ: цена деления шприца равна 1 мл.

Задача № 4. Определите цену деления шприца, если от подигольного конуса до цифры «10» - 5 делений.

Решение: Для определения цены деления шприца, необходимо цифру «10» разделить на количество делений 5.

$$\frac{10}{5} = 2\text{мл}.$$

Ответ: цена деления шприца равна 2 мл.

Задача № 5. Определите цену деления инсулинового шприца в ЕД, если от подигольного конуса до числа «20» - 5 делений.

Решение: Для определения цены деления инсулинового шприца, необходимо цифру «20» разделить на количество делений 5.

$$\frac{20}{5} = 4\text{ЕД}.$$

Ответ: цена деления шприца равна 4 ЕД.

ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА РАЗВЕДЕНИЕ РАСТВОРОВ

(получить из более концентрированного раствора менее концентрированный)

1 действие:

$$V_{конц.(мл)} = \frac{V_{необх.(мл)} \bullet C_{\%необх.}}{C_{\%исход.}} \qquad (1)$$

$V_{конц.}$ – количество мл более концентрированного раствора (который необходимо развести)

$V_{необх.}$ – необходимый объем в мл (который необходимо приготовить)

$C_{\%необх.}$ - концентрация менее концентрированного раствора (того, который необходимо получить)

$C_{\%исход.}$ - концентрация более концентрированного раствора (того, который разводим)

2 действие:

Количество мл воды (или разбавителя) = $V_{необх.} - V_{конц.}$ или воды до (ad) необходимого объема ($V_{необх.}$)

Задача№6. Во флаконе ампициллина находится 0,5 сухого лекарственного средства. Сколько нужно взять растворителя, чтобы в 0,5 мл раствора было 0,1 г сухого вещества.

Решение: при разведении антибиотика на 0,1 г сухого порошка берут 0,5 мл растворителя, следовательно, если,

0,1 г сухого вещества – 0,5 мл растворителя

0,5 г сухого вещества - х мл растворителя

получаем:

$$x = \frac{0{,}5 \times 0{,}5}{0{,}1} = 2{,}5\ \text{мл}$$

Ответ: чтобы в 0,5 мл раствора было 0,1 г сухого вещества необходимо взять 2,5 мл растворителя.

Задача № 7. Во флаконе пенициллина находится 1 млн. ЕД сухого лекарственного средства. Сколько нужно взять растворителя, чтобы в 0,5 мл раствора было 100000 ЕД сухого вещества.

Решение: 100000 ЕД сухого вещества – 0,5 мл сухого вещества, тогда в 100000 ЕД сухого вещества –0,5 мл сухого вещества.

1000000 ЕД – х

$$х = \frac{0{,}5 \times 1000000}{100000} = 5\text{мл}$$

Ответ: чтобы в 0,5 мл раствора было 100000ЕД сухого вещества необходимо взять 5 мл растворителя.

Задача № 8. Во флаконе оксацилина находится 0,25 сухого лекарственного средства. Сколько нужно взять растворителя, чтобы в 1 мл раствора было 0,1 г сухого вещества

Решение:

1 мл раствора – 0,1г

х мл - 0,25 г

$$x = \frac{1 \times 0{,}25}{0{,}1} = 2{,}5\ мл$$

Ответ: чтобы в 1 мл раствора было 0,1 г сухого вещества нужно взять 2,5 мл растворителя.

Задача №9. Цена деления инсулинового шприца – 4 ЕД. Скольким делениям шприца соответствует 28 ЕД. инсулина? 36 ЕД.? 52 ЕД.?

Решение: Для того, чтобы узнать скольким делениям шприца соответствует 28 ЕД. инсулина необходимо: 28:4 =7(делениям).

Аналогично: 36:4=9(делениям)

52:4=13(делениям)

Ответ: 7, 9, 13 делениям.

Задача № 10. Сколько нужно взять 10% раствора осветленной хлорной извести и воды (в литрах) для приготовления 10л 5%раствора.

Решение:

1) 100 г – 5г

10000 г - х

$$x = \frac{10000 \times 5}{100} = 500$$ (г) активного вещества

2) 100% – 10г

х % – 500г

$$x = \frac{100 \times 500}{10} = 5000$$ (мл) 10% раствора

3) 10000-5000=5000 (мл) воды

Ответ: необходимо взять 5000мл осветленной хлорной извести и 5000мл воды.

Задача № 11. Сколько нужно взять 10% раствора хлорной извести и воды для приготовления 5л 1% раствора.

Решение:

Так как в 100 мл содержится 10 г активного вещества то,

1) 100г – 1мл

5000 мл – х

$$x = \frac{5000 \times 1}{100} = 50$$ (мл) активного вещества

2) 100% – 10мл

х %– 50мл

$$x = \frac{100 \times 50}{10} = 500$$ (мл) 10% раствора

3) 5000-500=4500 (мл) воды.

Ответ: необходимо взять 500 мл 10% раствора и 4500мл воды.

Задача № 12. Сколько нужно взять 10% раствора хлорной извести и воды для приготовления 2л 0,5% раствора.

Решение:

Так как в 100 мл содержится 10 мл активного вещества то,

1) 100 % – 0,5мл

   2000 – х

$$x = \frac{2000 \times 0,5}{100} = 10$$ (мл) активного вещества

2) 100 % – 10 мл

   х – 10 мл

$$х = \frac{100 \times 10}{10} = 100$$ (мл) 10% раствора

3) 2000-100=1900 (мл) воды.

Ответ: необходимо взять 10 мл 10% раствора и 1900 мл воды.

Задача № 13. Сколько нужно взять хлорамина (сухое вещество) в г и воды для приготовления 1 литра 3%раствора.

Решение:

Процент – количество вещества в 100 мл.

1) 3г – 100 мл

   х - 10000 мл

$$х = \frac{3 \times 1000}{100} = 300$$ г

2) 10000 – 300=9700мл.

Ответ: для приготовления 10 литров 3%раствора необходимо взять 300г хлорамина и 9700мл воды.

Задача № 14. Сколько нужно взять хлорамина (сухого) в г и воды для приготовления 3-х литров 0,5% раствора.

Решение:

Процент – количество вещества в 100 мл.

1) 0,5 г – 100 мл

   х - 3000 мл

$$х = \frac{0,5 \times 3000}{100} = 15$$ г

2) 3000 – 15=2985мл.

Ответ: для приготовления 10 литров 3%раствора необходимо взять 15г хлорамина и 2985мл воды

Задача № 15. Сколько нужно взять хлорамина (сухого) в г и воды для приготовления 5 литров 3% раствора.

Решение:

Процент – количество вещества в 100 мл.

1) 3 г – 100 мл

   х - 5000 мл

$$х = \frac{3 \times 5000}{10} = 150$$ г

2) 5000 – 150= 4850мл.

Ответ: для приготовления 5 литров 3%раствора необходимо взять 150г хлорамина и 4850 мл воды.

Задача № 16. Для постановки согревающего компресса из 40% раствора этилового спирта необходимо взять 50мл. Сколько нужно взять 96% спирта для постановки согревающего компресса?

Решение:

По формуле (1)

$$x = \frac{50 \times 40\%}{96\%} = 21\text{мл}$$

Ответ: Для приготовления согревающего компресса из 96% раствора этилового спирта необходимо взять 21 мл.

Задача № 17. Приготовить 1 литр 1% раствор хлорной извести для обработки инвентаря из 1 литра маточного 10% раствора.

Решение: Подсчитайте сколько нужно взять мл 10% раствора для приготовления 1% раствора:

10г – 1000 мл

1г - х мл

$$x = \frac{1000}{10} = 100 \text{ мл}$$

Ответ: Чтобы приготовить 1 литр 1% раствора хлорной извести нужно взять 100 мл 10% раствора и добавить 900 мл воды.

Задача № 18. Больной должен принимать лекарство по 1 мг в порошках 4 раза в день в течении 7 дней, то сколько необходимо выписать данного лекарства (расчет вести в граммах).

Решение: 1г = 1000мг, следовательно, 1 мг = 0,001 г.

Подсчитайте сколько больному необходимо лекарства в день:

4* 0,001 г = 0,004 г, следовательно, на 7 дней ему необходимо:

7* 0,004 г = 0,028 г.

Ответ: данного лекарства необходимо выписать 0,028 г.

Задача № 19. Больному необходимо ввести 400 тысяч единиц пенициллина. Флакон по 1 миллиону единиц. Развести 1:1. Сколько мл раствора необходимо взять.

Решение: При разведении 1:1 в 1 мл раствора содержится 100 тысяч единиц действия. 1 флакон пенициллина по 1 миллиону единиц разводим10 мл раствора. Если больному необходимо ввести 400 тысяч единиц, то необходимо взять 4 мл полученного раствора.

Ответ: необходимо взять 4 мл полученного раствора.

Задача № 20. Ввести больному 24 единицы инсулина. Цена деления шприца 0,1 мл.

Решение: в 1 мл инсулина содержится 40 единиц инсулина. В 0,1 мл инсулина содержится 4 единицы инсулина. Чтобы ввести больному 24 единицы инсулина необходимо взять 0,6 мл инсулина.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Приготовить 3л 1% раствора хлорамина.
2. Приготовить 7л 0,5% раствора хлорамина.
3. Приготовить 10% раствор хлорной извести.
4. Приготовить 4 л 1% раствора хлорной извести.
5. Приготовить 3л 3% раствора хлорамина.

Практические занятия №2

Вычисление минутного объёма дыхания; расчёт прибавки роста и массы детей; оценка пропорциональности развития ребёнка.

Задача №1: в норме физиологическая потеря в родах составляет 0,5% от массы тела. Определить кровопотерю в мл., если масса женщины 67 кг?

Решение: Воспользуемся формулой (1).

$$x = \frac{67 * 0{,}5\%}{100\%} = 0{,}34 \quad \text{мл}$$

Ответ: Кровопотеря составила 0,34 мл.

Задача № 2: Шоковый индекс равен отношению пульса к систолическому давлению. Определить шоковый индекс, если пульс – 100, а систолическое давление – 80

Решение: для определения шокового индекса необходимо значение пульса разделить на значение систолического давления:

$$\frac{100}{80} = 12{,}5$$

Ответ: шоковый индекс равен 12,5

Задача № 3: Определите кровопотерю в родах, если она составила 10% ОЦК, при этом ОЦК составляет 5000 мл.

Решение: для определения кровопотери в родах, необходимо найти, сколько составляет 10% от 5000. Для этого воспользуемся формулой (1)

$$\frac{10\%}{100} \bullet 5000 = 500 \quad \text{мл}$$

Ответ: кровопотеря в родах 500 мл.

Задача № 1: Физиологическая убыль массы новорожденного ребенка в норме до 10%. Ребенок родился с весом 3.500, а на третьи сутки его масса составила 3.300. Вычислить процент потери веса.

Решение: Для решения данной задачей воспользуемся формулой

Потеря веса на третьи сутки составила 3500-3300=200 грамм. Найдем, сколько процентов 200г составляет от 3.500г., для этого воспользуемся формулой (2)

$$\frac{200}{3500} \bullet 100 = 5{,}7\%$$

Ответ: физиологическая убыль массы в норме и составила 5,7%

Задача №2: Вес ребенка при рождении 3300 г., в три месяца его масса составила 4900 г. Определить степень гипотрофии.

Решение: Гипотрофия I степени при дефиците массы 10-20%, II степени – 20-30%, III степени – больше 30%.

1) Сначала определим, сколько должен весить ребенок в 3 месяца, для этого к весу при рождении ребенка прибавим ежемесячные прибавки, т.е.

$$3300 + 600 + 800 * 2 = 5500 \text{ г}$$

2) Определяем разницу между долженствующим весом и фактическим (т.е. дефицит массы):

$$5500 - 4900 = 600 \text{ г}$$

3) Определяем какой процент, составляет дефицит массы, для этого воспользуемся формулой (2)

$$\frac{600}{5500} \bullet 100\% = 10{,}9\%$$

Ответ: Гипотрофия I степени и составляет 10,9%.

Задача №3: Ребенок родился ростом 51 см. Какой рост должен быть у него в 5 месяцев (5 лет)?

Решение: Прирост за каждый месяц первого года жизни составляет: в I четверть (1-3 мес.) по 3 см за каждый месяц, во II четверть (3-6 мес.) - 2,5 см, в III четверть (6-9мес.) – 1,5 см и в IV четверть (9-12 мес.) – 1,0 см.

Рост ребенка после года можно вычислить по формуле:

$X = 75 + 6n,$ где 75 - средний рост ребенка в 1 год, 6 – среднегодовая прибавка, n – возраст ребенка.

Рост ребенка в 5 месяцев: 51+3*3+2*2,5= 65 см

Рост ребенка в 5 лет: 75+6*5=105 см

Задача №4: Ребенок родился весом 3900г. Какой вес должен быть у него в 6 месяцев, 6 лет, 12 лет?

Решение: Увеличение массы тела ребенка за каждый месяц первого года жизни:

Месяц	1	2	3	4	5	6
Прибавка	600	800	800	750	700	650
Месяц	7	8	9	10	11	12
Прибавка	600	550	500	450	400	350

Массу тела ребенка до 10 лет в килограммах можно вычислить по формуле: m=10+2n, где 10 средний вес ребенка в 1 год, 2 – ежегодная прибавка веса, n – возраст ребенка.

Массу тела ребенка после 10 лет в килограммах можно вычислить по формуле : m=30+4(n-10), где 30 – средний вес ребенка в 10 лет, 4 – ежегодная прибавка веса, n – возраст ребенка.

Вес ребенка в 6 месяцев: m=3900+600+2*800+750+700+650= 8200г.

Вес ребенка в 6 лет: m=10+2*6=22кг

Вес ребенка в 12 лет: m=30+4*(12-10) = 38 кг

Задача№5: Какое артериальное давление должно быть у ребенка 7 лет?

Решение: Ориентировочно артериальное максимальное давление у детей после года можно определить с помощью формулы В.И.Молчанова: $X = 80 + 2n$, где 80 – среднее давление ребенка 1 года (в мм.рт.ст.), n - возраст ребенка.

Минимальное давление составляет $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$ максимального.

Максимальное давление у ребенка 7 лет: $X = 80 + 2 * 7 = 94$ мм.рт.ст

Задача № 6. Рассчитать суточную калорийность пищевого рациона ребенка 10 лет.

Решение: Суточная калорийность рассчитывается по формуле: $1000 + (100 * n)$, где n - число лет, 1000 – суточная калорийность пищевого рациона ребенка для годовалого ребенка.

Суточная калорийность пищевого рациона для ребенка 10 лет:

$1000 + (100 * 10) = 2000$ ккал

Задача № 7: Определить количество мочи, выделяемой за сутки ребенком 7 лет.

Решение: Для определения количества мочи, выделяемой за сутки ребенком, можно воспользоваться формулой: $600 + 100(n - 1)$, где 600 – количество мочи в мл, выделяемой ребенком 1 года за сутки, 100 – ежегодная прибавка, n - число лет жизни ребенка.

Ребенок 7 лет за сутки выделит: 600+100(7-1)=1200 мл.

Приложение 2

Практические занятия №3

Вычисление пределов

Цель работы:
студент должен:
знать:
- определение предела функции;
- свойства и правила вычисления пределов функции;

уметь:
- вычислять пределы функции в точке, на бесконечности.

Сведения из теории:
Предел функции
Число А называют пределом функции f(x) в точке, а если при x→a, f(x) →A.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции
Функция f(x) называется бесконечно малой при x→a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

Функция f(x) называется бесконечно большой при x→a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций
Если функции f(x) и g(x) бесконечно малые при x→a, то (f(x)+g(x)) бесконечно малая при x→a.
Если функция f(x) бесконечно малая при x→a и g(x) – ограниченная, то $(f(x)\cdot g(x))$ – бесконечно малая.

Если существует $\lim_{x\to a} f(x) = A$, а g(x) – бесконечно большая при x→a, то

$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \infty$; $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Если при x→a, f(x) – бесконечно малая, то $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая.

Если при x→a, f(x) – бесконечно большая, то $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая.

Теоремы о пределах
Если существуют пределы функций f(x) и g(x), то существует предел суммы (разности) этих функций, который равен сумме (разности) пределов функций f(x) и g(x):

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

Если существуют пределы функций f(x) и g(x), то существует предел произведения этих функций, который равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Если существуют пределы функций f(x) и g(x) при x→a и предел g(x)≠0, то существует предел частного этих функций, который равен отношению их пределов:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Следствие: постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to a}(kf(x)) = k\lim_{x\to a} f(x).$$

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9x^2+8x-1}{9x-1}$.

Решение:

здесь применима теорема о пределе частного.

Разложим на множители квадратный трехчлен, для этого достаточно найти корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$:

$$9x^2+8x-1=9\cdot(x-\frac{1}{9})\cdot(x+1).$$

Под знаком предела сократим одинаковые множители и перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to 1}\frac{9x^2+8x-1}{9x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{9\left(x-\frac{1}{9}\right)(x+1)}{9x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(9x-1)(x+1)}{9x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2.$$

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

Решение.

обнаружив неопределенность $\dfrac{0}{0}$, раскладываем многочлены в числителе и в знаменателе на множители:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x^2-1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2-1}=\infty.$$

Числитель дроби стремится к конечному пределу, равному 3, а знаменатель при $x\to 1$ является бесконечно малой, тогда дробь при $x\to 1$ является бесконечно большой.

Для раскрытия неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$ следует числитель и знаменатель разделить на одну и ту же старшую степень переменной.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+5x^2-7x+3}{5x^3-3x-10}$.

Решение:

в заданном пределе $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+5x^2-7x+3}{5x^3-3x-10}$ числитель и знаменатель не имеют конечных пределов, имеем неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Поделив одновременно числитель и знаменатель на x^3, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2-7x+3}{5x^3-3x-10}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{5-\frac{3}{x^2}-\frac{10}{x^3}}=\frac{2}{5},$$

т. к. каждая из дробей $\dfrac{5}{x}, \dfrac{7}{x^2}, \dfrac{3}{x^3}, \dfrac{3}{x^2}, \dfrac{10}{x^3}$ является бесконечно малой и стремится к нулю.

Задания для самостоятельного решения:
Вычислите пределы:

1 вариант	2 вариант	3 вариант
1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2}{x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$.	1) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2+5x+6}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x}{x^2-8}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$.	1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-11x-3}{3x^2-8x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x+x^3}{10x^3+x^2-80}$; 4) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}$.
4 вариант	5 вариант	6 вариант
1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{2(x^2-1)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+11}{x^2-1+3x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$.	1) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+64}{x+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}}\dfrac{3x^2+5x+2}{3x^2+8x+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+6}{-3x^3+x^2-26}$; 4) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$.	1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{1-x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{3x^2-13x+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^4}{1-x^2-8x^4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$.
7 вариант	8 вариант	9 вариант
1) $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{x^4-25}{x^2-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-7x+3}{3x^2-2x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2-x-6}{3x-x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$.	1) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-11x-3}{5x^2-16x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{20x^2-5x+4}{20x-5}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}$.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$.

Контрольные вопросы:
1. Что называется, пределом функции в точке.
2. Сколько пределов может иметь функция в точке?
3. Сформулируйте теоремы о пределах.

Практические занятия №4

Вычисление пределов по правилу замечательных пределов

Определение. Функция f(x) называется бесконечно малой при x→a, где a может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x. При различных значениях, а функция может быть бесконечно малой или нет.

Пример. Функция f(x) = x^n является бесконечно малой при x→0 и не является бесконечно малой при x→1, т.к. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

Теорема. Для того, чтобы функция f(x) при x→a имела предел, равный А, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки x = a выполнялось условие

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при x → a ($\alpha(x)\to 0$ при x → a).

Свойства бесконечно малых функций:

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.
2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.
3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки x = a является бесконечно малой функцией при x→a.
4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Используя понятие бесконечно малых функций, приведем доказательство некоторых теорем о пределах, приведенных выше.

Случай, когда при $x \to a$ или при $x \to \infty$ функция f(x) представляет степень, основание которой стремится к середине, а показатель к бесконечности (неопределенность 1^{∞}). В этом случае для нахождения предела используется замечательный предел: $\lim\limits_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = \lim\limits_{a\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Пример. Найти предел функции: $\lim\limits_{a\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}$

Решение: Исключив целую часть из дроби, полагаем $t = -\frac{5}{x+2}$

$$\lim_{a\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1} = \lim_{a\to\infty}\left(1-\frac{5}{x+2}\right)^{2x+1} = \lim_{a\to 0}(1+t)^{-\frac{10}{t}-3} = \left(\lim_{a\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-10}\cdot\lim_{a\to 0}(1+t)^{-3} = e^{-10}\cdot 1 = e^{-10}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \left\{\begin{array}{l} y = x-1 \\ x\to\infty \\ y\to\infty \end{array}\right\} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4} =$$

$$= \left\{z = \frac{y}{4}\right\} = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z} = \left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4} = e^{4}$$

Замечательные пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (x есть радиальная мера угла)

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{In(1+x)}{x} = 1$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha$ e или $\lim\limits_{x\to 0}(1+e)^{\frac{1}{t}} = e$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

Приложение 3

Практические занятия №5 Вычисление производных

Цель работы:
студент должен:
знать:

- системy и определение производной;
- табличные решения производных элементарных функций, в том числе обратных тригонометрических функций;
- правила дифференцирования функций;

уметь:

- находить производную функции;
- находить дифференциал функции;
- дифференцировать элементарные функции.

Сведения из теории:
Табличные значения производных элементарных функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций:

$c' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(kx+b)' = k$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(e^x)' = e^x$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(a^x)' = a^x \ln a$		
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$		
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$		

Правила вычисления производных:

$$1.\ (x \pm y)' = x' \pm y',$$

$$2.\ (xy)' = x'y + xy',$$

$$3.\ \left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{x'y - xy'}{y^2}.$$

Пример 1

Вычислите производную функции $f(x) = -2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x$.

Решение:
воспользуемся формулами и правилом 1 вычисления производных:

$$f'(x) = \left(-2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x\right)' = -2 \cdot 2x^{2-1} - \frac{1}{3} \cdot 3x^{3-1} + 5 \cdot 1x^{1-1} = -4x - x^2 + 5.$$

Пример 2

Вычислите производную функции $f(x) = \sqrt{x}(x-3)$.

Решение:
воспользуемся формулами и правилом 2 вычисления производных:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}(x-3)\right)'=\left(\sqrt{x}\right)'(x-3)+\sqrt{x}(x-3)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3)+\sqrt{x}\cdot 1.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3)+\sqrt{x}=\frac{x-3+2x}{2\sqrt{x}}=\frac{3x-3}{2\sqrt{x}}.$$

Задания для самостоятельного решения:
Вычислите производную функции:

1 вариант 1) $f(x)=x^3-3x^2+4x-5$; 2) $f(x)=(x+1)\sqrt{x}$; 3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$; 4) $f(x)=\dfrac{(x^2-1)(x+3)}{15}$.	2 вариант 1) $f(x)=3x^3-\dfrac{1}{2}x^2+4x$; 2) $f(x)=(x-2)\sqrt{3x}$; 3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2}$; 4) $f(x)=(x^2+3)(x-4)$.
3 вариант 1) $f(x)=2x^2\sqrt{x}-4x+11+\dfrac{1}{x}$; 2) $f(x)=(x-2)\sqrt[3]{x}$; 3) $f(x)=\dfrac{e^x+1}{x}$; 4) $f(x)=\ln x(x+3)$.	4 вариант 1) $f(x)=3x\sqrt[3]{x}-2x+5+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$; 2) $f(x)=\sqrt{x+1}(x^3-5)$; 3) $f(x)=\dfrac{9x+1}{\sqrt[3]{x^2}}$; 4) $f(x)=(x^2-1)\sqrt{x+3}$.
5 вариант 1) $f(x)=3x^3\sqrt{x}-2x+2+\dfrac{2}{x^2\sqrt{x}}$; 2) $f(x)=0{,}5(x+1)^2$; 3) $f(x)=\dfrac{6x}{x^2+1}$; 4) $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-5)}{12}$.	6 вариант 1) $f(x)=\dfrac{3x^3}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{2x^2}{\sqrt{x}}+5$; 2) $f(x)=(x^3+1)\sqrt{x}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^3-3x}{x+2}$; 4) $f(x)=(x^2-1)(x+3)$.
7 вариант 1) $f(x)=\dfrac{-2x^3}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{3x^2}{\sqrt{x}}+5x-1$; 2) $f(x)=(x^3-2)\sqrt{x+1}$; 3) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{3}x^3-2}{4x}$; 4) $f(x)=\ln x(e^x-1)$.	8 вариант 1) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{4}x^4-0{,}5x^2-5$; 2) $f(x)=\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}-x)$; 3) $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}+x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 4) $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+\ln x}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите значения производных некоторых табличных функций.
2. Сформулируйте правила вычисления производных.

Практические занятия №6
Вычисление производных сложных функций.

Цель работы:
студент должен:
знать:
- системy и определение производной, второй производной и производных высших порядков;
- табличные решения производных элементарных функций, в том числе обратных тригонометрических функций;
- правила вычисления производной сложной функции;

уметь:
- находить производную сложной функции;
- находить вторую производную и производную высших порядков.

Сведения из теории:

Производная сложной функции

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in (a;b)$, имеет производную в точке $x_0 \in (a;b)$, а функция $z = f(x)$ имеет производную в точке $y_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $z(x) = f(g(x))$ имеет производную в точке x_0, которая вычисляется по формуле:

$$z'(x_0) = (f(g(x_0))' = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Пример 1

Вычислите производную функции $y = (x^2 + 3x + 10)^2$.

Решение:

представим заданную функцию как композицию квадратичной функции и степенной

$$y = (x^2 + 3x + 10)^2;$$
$$g(x) = x^2 + 3x + 10;$$
$$f(x) = (g(x))^2;$$
$$f'(x) = ((g(x))^2)' = 2g(x) \cdot (g(x))';$$
$$y' = 2(x^2 + 3x + 10) \cdot (x^2 + 3x + 10)' = 2(x^2 + 3x + 10)(2x + 3).$$

Производные высших порядков

Вторая производная это производная от первой производной, т.е. $y'' = (y')'$, и т.д.

Производные высших порядков обозначаются римскими цифрами.

Пример 2

Найти четвертую производную $y = x^6 + 4x + 12$.

Решение:

вычисляем последовательно производные:

$$y' = 6x^5 + 4;$$
$$y'' = 30x^4;$$
$$y''' = 120x^3;$$
$$y^{IV} = 360x^2.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите значение «сложной» производной в указанной точке:

1 вариант	2 вариант
1) $f(x) = \sin^2 x;\quad f'(\pi/4);$	1) $f(x) = \cos^2 x;\quad f'(-\pi/4);$

2) $f(x)=\ln\cos x;\quad f'(-\pi/3);$ 3) $f(x)=\sin 2x-\cos^2 x;\quad f'(0);$ 4) $f(x)=\ln tgx;\quad f'(\pi/4);$ 5) $f(x)=e^{\sin x};\quad f'(0).$	2) $f(x)=\ln\sin x;\quad f'(\pi/6);$ 3) $f(x)=\sin^2 x+\cos 2x;\quad f'(0);$ 4) $f(x)=\ln ctgx;\quad f'(-\pi/4);$ 5) $f(x)=e^{\cos 2x};\ f'(\pi/4).$
3 вариант 1) $f(x)=\ln\sin^2 x;\quad f'(\pi/4);$ 2) $f(x)=\cos^2 x^2;\quad f'(\sqrt{\pi}/2);$ 3) $f(x)=2\sin^2 x\cos x;\quad f'(\pi/2);$ 4) $f(x)=tg^2 3x;\quad f'(0);$ 5) $f(x)=e^{\sin 2x}-3e^{\cos 2x};\ f'(0).$	4 вариант 1) $f(x)=-2\sin^2 x;\quad f'(-\pi/4);$ 2) $f(x)=\ln\cos x;\quad f'(\pi/3);$ 3) $f(x)=2\sin 2x+3\cos 3x;\quad f'(0);$ 4) $f(x)=\ln tgx;\quad f'(\pi/4);$ 5) $f(x)=e^{-2\sin x};\quad f'(0).$
5 вариант 1) $f(x)=\ln\cos^2 2x;\quad f'(\pi/8);$ 2) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x;\ f'(\pi/4);$ 3) $f(x)=\ln\sqrt{\cos 2x};\quad f'(\pi/8);$ 4) $f(x)=\ln tg2x;\quad f'(\pi/8);$ 5) $f(x)=e^{\cos 2x}-2e^{\sin 2x};\ f'(\pi/4).$	6 вариант 1) $f(x)=\ln tg^2 2x;\quad f'(\pi/24);$ 2) $f(x)=\cos^3 x;\ f'(\pi/4);$ 3) $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x;\quad f'(\pi/4);$ 4) $f(x)=e^{-\sin x}-e^{-\cos x};\ f'(\pi/2);$ 5) $f(x)=\ln\sqrt{\sin x};\ f'(\pi/4).$
7 вариант 1) $f(x)=\ln\cos^2 4x;\quad f'(\pi/16);$ 2) $f(x)=4\cos^2 x;\ f'(\pi/4);$ 3) $f(x)=4\sin^5 2x;\quad f'(\pi/8);$ 4) $f(x)=\ln tg3x;\quad f'(\pi/12);$ 5) $f(x)=e^{\sin x}+e^{\cos x};\ f'(\pi/2).$	8 вариант 1) $f(x)=\ln\sqrt{\sin x};\quad f'(\pi/8);$ 2) $f(x)=\cos^4 3x;\quad f'(\pi/6);$ 3) $f(x)=\ln\sqrt{tg3x};\quad f'(\pi/12);$ 4) $f(x)=\arcsin 4x+e^{3x};\quad f'(0);$ 5) $f(x)=5\arccos\sqrt{x};\ f'(1/2).$
9 вариант 1) $f(x)=\ln\sqrt{\cos 2x};\quad f'(-\pi/8);$ 2) $f(x)=\sin^4 6x;\ f'(\pi/3);$ 3) $f(x)=\ln\sqrt{ctg3x};\quad f'(-\pi/12);$ 4) $f(x)=arctg\sqrt{x};\quad f'(1/4);$ 5) $f(x)=5arccos\sqrt{1-x};\ f'(1/2).$	

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте правила вычисления производных сложной функции.
2. Что называется, второй производной данной функции?

Приложение 4

Практические занятия №7

Вычисление неопределенного интеграла по правилу непосредственного интегрирования

Цель работы:
студент должен:
знать:

- таблицу значений неопределенных интегралов;
- суть метода замены переменной в неопределенном интеграле;

уметь:

- вычислять неопределенные интегралы методом замены переменной.

Сведения из теории:
Табличные значения неопределенных интегралов

$\int dx = x + c$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + c$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\int e^x dx = e^x + c$	$\int \sin xdx = -\cos x + c$ $\int \cos xdx = \sin x + c$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$ $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + c$

Интегрирование методом замены переменной
Сущность интегрирования методом замены переменной (способом подстановки) заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(t)dt$, который легко вычисляется по таблице значений неопределенных интегралов.
Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ заменяем переменную x новой переменной t.
Дифференцируя равенство, получаем выражение dx.
После того как интеграл относительно новой переменной t будет найден, с помощью обратной подстановки он приводится к переменной x.

Пример 1

Вычислите интеграл методом замены переменной: $\int \cos(5x+3)dx$.

Решение:
с помощью замены части подынтегрального выражения приведем заданный интеграл к табличному виду:

$$\int \cos(5x+3)dx = \left| \begin{array}{l} t = 5x+3 \\ (5x+3)'dx = dt \\ 5dx = dt \\ dx = \frac{dt}{5} \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int \cos tdt = \frac{\sin t}{5} + c = \frac{\sin(5x+3)}{5} + c.$$

Пример 2

Вычислите интеграл методом замены переменной: $\int (2x+1)^{10} dx$.

Решение:

с помощью замены части подынтегрального выражения приведем заданный интеграл к табличному виду:

$$\int (2x+1)^{10}dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x+1 \\ (2x+1)'dx = dt \\ 2dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^{10}dt = \frac{t^{11}}{2*11} + c = \frac{(2x+1)^{11}}{22} + c.$$

Задания для самостоятельного решения:
Вычислите следующие интегралы методом замены переменной:

1 вариант	2 вариант	3 вариант
1) $\int (x^2+3)^5 xdx$; 2) $\int \frac{x}{x^2-1}dx$; 3) $\int \cos^3 xdx$; 4) $\int \frac{\sin 3xdx}{2+\cos 3x}$.	1) $\int 4(x^4-1)^2 x^3 dx$; 2) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; 3) $\int \frac{dx}{(4-3x)^2}$; 4) $\int \sqrt[3]{(3x+1)^2}dx$.	1) $\int \frac{6x^2dx}{(1-2x^3)^4}$; 2) $\int \frac{xdx}{4x^2+1}$; 3) $\int (7-2x)^3 dx$; 4) $\int \frac{3}{x+5}dx$.
4 вариант	**5 вариант**	**6 вариант**
1) $\int \frac{dx}{(5x+1)^3}$; 2) $\int \frac{3}{12-x}dx$; 3) $\int (5t-1)^4 dt$; 4) $\int \sqrt[3]{(-4x+1)^5}dx$.	1) $\int \frac{\sin 2xdx}{1-\cos 2x}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$; 3) $\int (2x^3-3)^2 x^2 dx$; 4) $\int \frac{x^3dx}{(5x^4+3)^5}$.	1) $\int (x^3+1)x^2dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; 3) $\int \frac{xdx}{(5x^2+1)^3}$; 4) $\int \frac{10}{1-4x}dx$.
7 вариант	**8 вариант**	**9 вариант**
1) $\int tgxdx$; 2) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$; 3) $\int 3x^2\sqrt{2x^3-1}dx$; 4) $\int 2x\sqrt{\left(1-3x^2\right)^3}dx$.	1) $\int x^2\sqrt{x^3+5}dx$; 2) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{1-\sin x}}$; 3) $\int (x^4-2)^2 x^3dx$; 4) $\int \sin\left(\frac{x}{5}\right)dx$.	1) $\int \sin 3xdx$; 2) $\int x\sqrt{1-x^2}dx$; 3) $\int \frac{12xdx}{(5x^3+1)^2}$; 4) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{1+3\sin x}}$.

Контрольные вопросы:

1. Какая функция называется первообразной для функции f(x), при x$\in$ (a; b)?
2. Что называется, неопределенным интегралом?
3. Перечислите основные формулы интегрирования.
4. Сформулируйте суть метода непосредственного интегрирования.
5. Сформулируйте суть метода замены переменной.

Сведения из теории:
Интегрирование по частям
Вычисляя дифференциал произведения, имеем:

$$d(uv) = udv + vdu,$$

откуда

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Если дифференциалы двух функций равны, то их неопределенные интегралы совпадают. Поэтому

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

и, следовательно,

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

С помощью этой формулы вычисление интеграла $\int udv$ сводится к вычислению интеграла $\int vdu$, если последний окажется проще исходного.

Пример 3

Вычислите интеграл методом интегрирования по частям: $\int x\sin xdx$.

Решение:
преобразуя части подынтегрального выражения, приведем заданный интеграл к табличному виду:

$$\int x\sin xdx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = \sin xdx \\ du = dx & \int dv = \int \sin xdx \\ & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + c.$$

Пример 4

Вычислите интеграл методом интегрирования по частям: $\int \frac{\ln xdx}{x^2}$.

Решение:
преобразуя части подынтегрального выражения, приведем заданный интеграл к табличному виду:

$$\int \frac{\ln xdx}{x^2} = \left| \begin{matrix} u = \ln x & dv = \frac{dx}{x^2} \\ du = \frac{dx}{x} & \int dv = \int x^{-2}dx \\ & v = -\frac{1}{x} \end{matrix} \right| = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c.$$

Задания для самостоятельного решения:
Вычислите следующие интегралы методом интегрирования по частям:

1 вариант 1) $\int x\cos xdx$; 2) $\int xe^x dx$; 3) $\int e^{2x}\cos xdx$.	2 вариант 1) $\int (1-x)\sin xdx$; 2) $\int \operatorname{arctg} xdx$; 3) $\int e^x\cos(x-3)dx$.	3 вариант 1) $\int \frac{\ln xdx}{x^3}$; 2) $\int x\cos 3xdx$; 3) $\int 2xe^x dx$.
4 вариант 1) $\int \ln^2 xdx$; 2) $\int x\sin xdx$;	5 вариант 1) $\int \ln xdx$; 2) $\int x\cos(5x-7)dx$;	6 вариант 1) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; 2) $\int xe^{-2x}dx$;

3) $\int e^{3x}\sin(2x-\frac{\pi}{4})dx$.	3) $\int e^{x}\cos xdx$.	3) $\int \arccos^2 xdx$.
7 вариант 1) $\int e^{3x}\sin 2xdx$; 2) $\int (3x-4)\ln xdx$; 3) $\int \arccos xdx$.	8 вариант 1) $\int x2^{x}dx$; 2) $\int (x-5)\sin 2xdx$; 3) $\int \arcsin xdx$.	9 вариант 1) $\int x\mathrm{arctg}xdx$; 2) $\int x^2e^{-x}dx$; 3) $\int x^2\sin xdx$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте суть метода интегрирования по частям.

Практические занятия №8

Вычисление неопределенного интеграла методом замены переменных. Вычисление определенного интеграла.

Цель: рассмотреть вычисление определённых интегралов методом интегрирования по частям и методом замены переменной.

Теоретические сведения.

1. Метод интегрирования по частям.

Метод интегрирования по частям решает очень важную задачу, он позволяет интегрировать некоторые функции, отсутствующие в таблице, произведение функций, а в ряде случаев – и частное.

Данный метод позволяет свести исходный определенный интеграл к более простому виду либо к табличному интегралу. Этот метод наиболее часто применяется, если подынтегральная функция содержит логарифмические, показательные, обратные тригонометрические, тригонометрические функции, а также их комбинации.

Если функции u= u(x) и v = v(x) имеют непрерывные производные на отрезке [a;b], то имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

Самое сложное, что есть в этом методе – это правильно определить, какую часть подынтегрального выражения брать за u, а какую за dv

Рассмотрим стандартные случаи.

- Для интегралов вида $\int \mathrm{P}(x)e^{ax}dx$, $\int \mathrm{P}(x)\sin(ax)\,dx$ или $\int \mathrm{P}(x)\cos(ax)\,dx$, где $P_n(x)$ - многочлен, a– число. Удобно принять u=P(x), а за dv обозначить все остальные сомножители.
- Интегралы вида $\int \mathrm{P}(x)\ln x\,dx$, $\int \mathrm{P}(x)\arcsin x\,dx$, $\int \mathrm{P}(x)\arccos x\,dx$, $\int \mathrm{P}(x)arctgx\,dx$, $\int \mathrm{P}(x)arcctgx\,dx$. Удобно принять P(x) = dv, а за u все остальные сомножители.
- Интегралы вида $\int \sin bx \cdot e^{ax}dx$, $\int \cos bx \cdot e^{ax}dx$, где a и b числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

Пример 1. Вычислить $\int_1^2 xe^x\,dx$

Решение.

$$\int_1^2 xe^x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x \ \Rightarrow du = dx \\ e^x dx = dv \ \Rightarrow v = \ e^x \end{matrix}\right| = \ xe^x|_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx =$$

$$= 2e^2 - \ e - \ e^x|_1^2 = 2e^2 - \ e - \ e^2 + \ e = \ e^2.$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^\pi xsinx\,dx$

Решение.

$$\int_0^\pi xsinx\,dx = \left|\begin{matrix} u = x \ \Rightarrow du = dx \\ \sin x\,dx = dv \ \Rightarrow v = \ -\cos x \end{matrix}\right| = \ -xcos\,x|_0^\pi + \int_1^2 \cos x \ dx =$$

$= -\pi \cdot (-1) + \ 0 + \ \sin x|_0^{\pi} = \pi.$

2. Интегрирование заменой переменной (подстановкой).

Пусть для интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка x = φ(t).

Если: 1) функция x = φ(t) и ее производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при t∈[α;β];
2) множеством значений функции x = φ(t) при t∈[α;β] является отрезок [a;b]
3) φ(α) = a и φ(β) = b, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - \ F(a)$$

Отметим, что: 1) При вычислении определённого интеграла методом замены переменной возвращаться к старой переменной не требуется;
2) часто вместо подстановки x = φ(t) применяют подстановку t = g(x);
3) не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных.
Алгоритм вычисления определенного интеграла методом подстановки:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Находят новые пределы интегрирования.
5. Производят замену под интегралом.
6. Находят полученный интеграл.

Пример 1. Вычислить $\int_4^5 x\sqrt{x^2 - 16}\ dx$

Решение. Замена: t = x^2 -16; dt = 2x dx; dx= $\frac{dt}{2x}$.

Найдём новые пределы интегрирования. При x = 4, α= t(4) = 4^2 -16 =0; x = 5, β= t(5) = 5^2 -16 =9.
Получаем:

$$\int_4^5 x\sqrt{x^2 - 16}\ dx = \int_0^6 \frac{1}{2}\sqrt{t}\ dt = \frac{1}{2}\int_0^6 t^{\frac{1}{2}}\ dt = \frac{1}{2}\left.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^9 = \left.\frac{1}{3}t\sqrt{t}\right|_0^9 = \frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{9} = 9.$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}$

Решение. Замена: t = $\sqrt{2x+1} + \ 1$, .

t -1 =$\sqrt{2x+1}$, 2x + 1 = $(t-1)^2$, $x = \frac{(t-1)^2 - 1}{2} = \frac{t^2 - 2t}{2}$, dx = (t -1)dt.

Найдём новые пределы интегрирования. При x = 0, α= t(0) = 2; x = 4, β=t(4)=4.
Получаем:

$$\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+\ 1} = \int_2^4 \frac{(t^2-2t)\cdot(t-1)}{2t}dt = \frac{1}{2}\int_2^4 (t-2)(t-1)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^4 (t^2-3t+2)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+2t\right)\Big|_2^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{64}{3}-24+8\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-6+4\right) = \frac{7}{3}.$$

Задания для самостоятельного решения.

Вариант 1.

1. При помощи формулы интегрирования по частям вычислите интегралы:

а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\cos4x\ dx$; б) $\int_0^1 x\ln(1+x)dx$

2. Вычислите интегралы с помощью замены переменной:

а) $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; б) $\int_1^2 3x(1-x)^{17}dx$

Вариант 2.

1. При помощи формулы интегрирования по частям вычислите интегралы:

а) $\int_0^3 (x-3)e^{-x}dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x^2\sin x\ dx$

2. Вычислите интегралы с помощью замены переменной:

а) $\int_1^9 \frac{xdx}{\sqrt{2x+7}}$; б) $\int_2^3 x(3-x)^7dx$

Контрольные вопросы.

1. Что такое определенный интеграл?
2.Какими свойствами обладает определенный интеграл?
3.Что такое формула Ньютона-Лейбница?
4.Как осуществляется замена переменной в определенном интеграле?
5.Как осуществляется интегрирование по частям в определенном интеграле?

Приложение 5

Практические занятия №9

Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Учебная цель: научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Студент должен

уметь

-применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

-решать дифференциальные уравнения

знать:

- основные понятия и методы математического анализа.
- основные методы дифференциального и интегрального исчисления

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

1. Дифференциальное уравнение 1-го порядка. Общее и частное решение.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1)$$

т.е. содержит независимую переменную x, искомую функцию y(x) и её производную y′(x).

Разрешая уравнение (1), если это возможно, относительно производной y′ получим

$$y' = f(x,y). \qquad (2)$$

Иногда уравнения (1), (2) записывают в дифференциалах:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \qquad (3)$$

Дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений.

Всякое отдельно взятое решение дифференциального уравнения называется его частным решением.

Для многих дифференциальных уравнений первого порядка общее решение можно задать формулой вида:

$$y = y(x, C), \qquad (4)$$

где C - произвольная постоянная такая, что при любом C функция (4) является частным решением дифференциального уравнения. С геометрической точки зрения совокупность всех решений дифференциального уравнения представляет собой семейство кривых, называемых интегральными кривыми, а каждое частное решение представляет собой отдельную интегральную кривую.

Иногда не удаётся получить решения дифференциального уравнения в явной форме, т.е в виде y = y(x, C), а получают их в неявной форме, т.е. решение задаётся формулой вида:

$$\Phi(y, x, C) = 0 \qquad (5)$$

Выражение типа Φ (x, y, C) = 0 в этом случае называют интегралом (частным, общим) дифференциального уравнения.

2. Задача Коши для дифференциальных уравнений первого порядка.

В случае дифференциального уравнения первого порядка задача Коши формулируется следующим образом: найти решение y = y(x) уравнения

$y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ или в другой записи $y\big|_{x=x_0} = y_0$, где x_0, y_0 - заданные числа. Задача Коши кратко записывается так:

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y = y_0 \quad \text{при } x = x_0. \end{cases} \qquad (6)$$

Геометрически решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, представляет интегральную кривую, проходящую через данную точку $(x_0; y_0)$.

3. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение (2) называется уравнением с разделяющимися переменными, если имеет следующий вид:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \qquad (7)$$

В предположении, что $f_2(y) \neq 0$, уравнение с разделяющимися переменными (7) можно переписать в виде (разделить переменные):

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \qquad (8)$$

Уравнение вида (8) называется уравнением с разделёнными переменными.

Теорема 1. Если существуют интегралы $\int \frac{dx}{f_2(y)}$ и $\int f_1(x)dx.$, то общий интеграл уравнения с разделёнными переменными (8) задаётся уравнением

$$F_2(y) = F_1(x) + C \qquad (9)$$

где $F_2(y)$ и $F_1(x)$ - некоторые первообразные соответственно функций $\frac{1}{f_2(y)}$ и $f_1(x)$.

При решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными можно руководствоваться следующим алгоритмом:

1) разделить переменные (с учётом условий, когда это можно делать);
2) проинтегрировать почленно полученное уравнение с разделёнными переменными;
3) найти его общий интеграл;
4) выяснить, имеет ли уравнение (5) решения, не получающиеся из общего интеграла;
5) найти частный интеграл (или решение), удовлетворяющий начальным условиям (в случае задачи Коши).

Примеры по выполнению практической работы

Пример: Найти частное решение уравнения:

$$\begin{cases} 2yy' = 1 - 3x^2; \\ y_0 = 3 \quad \text{при } x_0 = 0 \end{cases}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Представим его в дифференциалах. Учитывая, что $y' = \frac{dx}{dy}$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$$

Разделим переменные:

$$2ydy = (1 - 3x^2)dx.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, найдём

$$\int 2ydy = \int (1 - 3x^2)dx,$$

т.е. $y^2=x-x^3+C$

Подставив начальные значения $x_0=1$, $y_0=3$, найдём С.

$$9=1-1+C, \text{ т.е. } C=9$$

Следовательно, искомый частный интеграл будет $y^2=x-x^3+9$, или

$x^3+y^2 - x-9=0$

Задания для практического занятия:

Вариант 1:

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x+1)ydx = dy$;

б) $(y-1)^2 dx + (1-x)^3 dy = 0$;

2. Решить задачу Коши (найти частные решения дифференциальных уравнений):

а) $\begin{cases} x^2 dy = y^2 dx \\ y = 0{,}25 \quad при \quad x = 0{,}1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3\text{ő}\sqrt[3]{\text{ó}}dx + (1-\text{ő}^2)dy = 0 \\ y = 1 \quad \text{ď₫č} \quad \text{ő} = 0 \end{cases}$

Вариант 2:

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $2xdx = 3y^2 dy$;

б) $x\sqrt{9-y^2}dx - y(4+x^2)dy = 0$

2. Решить задачу Коши (найти частное решение дифференциальных уравнений):

а) $\begin{cases} \dfrac{dy}{3x} - \dfrac{dx}{2y} = 0 \\ y = 5 \quad при \quad x = 4 \end{cases}$

б) $\begin{cases} ydx - (4+x^2)\ln ydy = 0 \\ y = 1 \quad при \quad x = 2 \end{cases}$

Вариант 3:

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений

а) $x^3 dy - y^3 dx = 0$;

б) $\cos x \cos ydx - \sin x \sin ydy = 0$;

2. Решить задачу Коши (найти частное решение дифференциальных уравнений):

а) $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2\sqrt{x}} \\ y = e^2 при \quad x = 9 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^2 dx = e^x dy \\ y = 1, если \quad x = 0 \end{cases}$

Вариант 4:

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y' = x^2 y - x^2$;

б) $\sin^2 y \cdot ctgxdx + \cos x \cdot tgydy = 0$;

2. Решить задачу Коши (найти частное решение дифференциальных уравнений):

а) $\begin{cases} y'\sqrt{x} = 1 + y^2 \\ y = 0 \quad при \quad x = 4 \end{cases}$

б) $\begin{cases} (1+x)ydx+(1-y)xdy=0 \\ y=1, если \quad x=1 \end{cases}$

Контрольные вопросы

1.Дать определение дифференциального уравнения.
2.От чего зависит порядок дифференциального уравнения?
3.Назовите алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
4.В чем заключается задача Коши?

Практические занятия №10

Решение однородных дифференциальных уравнений.

Постановка задачи. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения, то есть, дифференциального уравнения вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (1)$$

где P(x, y) и Q(x, y) – однородные функции порядка к:

$$P(tx,ty) = t^k P(x,y) \;\; и \;\; Q(tx,ty) = t^k Q(x,y).$$

План решения.

1) Представим уравнение (1) в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

2) Выполним подстановку $\frac{y}{x} = u$, где u=u(x) – новая искомая функция. При этом $y' = u + xu'$.Получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$u + xu' = f(u).$$

В результате преобразований придем к

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u. \qquad (2)$$

3) В области, где $f(u) - u \neq 0$, умножим обе части равенства (2) на $\frac{dx}{x(f(u)-u)}$. Построим уравнение с разделенными переменными вида

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}. \qquad (3)$$

4) Интегрируя, получим общее решение

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln|x| + \ln c.$$

Делаем замену $u = \frac{y}{x}$ и записываем ответ.

Замечание 1. Подстановку $y = xu$ в уравнение (1) можно выполнить сразу, учитывая, что $dy = udx + xdu$.

Замечание 2. Если уравнение $f(u) - u = 0$ имеет корень u=u_0, то решением уравнения (1) будет еще и y=xu_0.

Пример. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$$

Решение.

1) Представим уравнение в виде

$$y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}. \qquad (*)$$

Это уравнение однородное, так как при замене x на tx и y на ty оно не изменится. Действительно,

$$y' = \frac{(tx)^2+(ty)^2}{2(tx)(ty)} = \frac{t^2(x^2+y^2)}{2t^2xy} = \frac{x^2+y^2}{2xy}.$$

Разделим числитель и знаменатель правой части уравнения $(*)$ на xy, получим

$$y' = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x}.$$

2) Выполним подстановку $\frac{y}{x}=u(x),$ где u(x) – новая неизвестная функция. Тогда $y'=u+xu'$ и уравнение приводится к виду

$$u+xu'=\frac{1}{2u}+\frac{1}{2}u.$$

В результате преобразований получим

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1-u^2}{2u}.$$

3) Разделяем переменные в последнем уравнении, умножив обе части равенства на $\frac{2udx}{x(1-u^2)}$:

$$\frac{2u}{1-u^2}du=\frac{dx}{x}.$$

4) Интегрируя, получим

$$\int\frac{2u}{1-u^2}du=\int\frac{dx}{x},$$

$$-\ln\left|1-u^2\right|=\ln|x|+\ln c,$$

$$1-u^2=\frac{1}{x}c_1.$$

Теперь вернемся к переменной y, для чего заменим u на $\frac{y}{x}$:

$$\frac{x^2-y^2}{x^2}=\frac{1}{x}c_1,$$

то есть,

$$x^2-y^2=c_1x-$$

- общий интеграл.

Задачи для решения.

Найти общие решения дифференциальных уравнений

1. $y'=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2};$

2. $y'=e^{y/x}+\dfrac{y}{x};$

3. $xy+y^2=(2x^2+xy)y';$

4. $(2\sqrt{xy}-y)dx+xdy=0;$

5*. $xy'\sin(y/x)+x=y\sin(y/x).$

Контрольные вопросы

1. Каков общий вид однородного дифференциального уравнения первого порядка?
2. С помощью какой подстановки решается однородное дифференциальное уравнение первого порядка и к какому уравнению сводится его решение?

Практические занятия №11

Решение линейных дифференциальных уравнений.

Цель занятия. Научить студента находить общее и частные решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка; общие решения дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.

Порядок проведения:

1. изучить теоретический материал;
2. разобрать предложенный пример;
3. выполнить самостоятельно индивидуальные задания;
4. ответить на контрольные вопросы.

Студент должен:

знать: метод решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка; метод решения дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка;

уметь: решать линейные дифференциальные уравнения первого порядка; решать дифференциальные уравнения второго порядка, допускающих понижение порядка.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если оно содержит искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$ в первой степени и не содержит их произведений. В общем случае оно имеет вид

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты A, B, C – заданные непрерывные функции от x. Предполагая, что в некотором интервале изменения x функция $A(x) \neq 0,$ разделим обе части уравнения на $A(x)$:

$$y' + \frac{B(x)}{A(x)}y + \frac{C(x)}{A(x)} = 0.$$

Обозначая через $\frac{B(x)}{A(x)} := p(x),\ \frac{C(x)}{A(x)} := -f(x),$ перепишем уравнение в виде

$$y' + p(x)y = f(x).$$

Определение. Если $f(x) \equiv 0,$ то уравнение

$$y' + p(x)y = 0$$

называется линейным однородным (линейным уравнением без правой части).

Если $f(x) \neq 0,$ то уравнение называется линейным неоднородным (линейным уравнением с правой частью).

Замечание. Линейное однородное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

Указание 1.

Постановка задачи. Решить задачу Коши для линейного дифференциального уравнения

$$y' + p(x)y = f(x) \qquad (2)$$

с начальным условием

$$y(x_0)=y_0, \qquad (2')$$

где $p(x), f(x)$ – непрерывные функции; в частности, $p(x), f(x)$ могут быть постоянными величинами.

План решения.

1) Выполним замену

$$y = U(x)V(x) \qquad (3)$$

$$y' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x),$$

где U, V – неизвестные функции от x.

2) Подставим в уравнение (2) вместо y и y' их выражения из (3), получим

$$U'V + UV' + p(x)UV = f(x).$$

Выносим во втором и третьем слагаемых U за скобки:

$$U'V + U(V' + p(x)V) = f(x). \qquad (4)$$

3) Так как вместо одной неизвестной функции y теперь требуется найти две функции $U = U(x)$ и $V = V(x)$, удовлетворяющих уравнению (4), то любую из них (U или V) можно выбрать произвольно.

Выберем V произвольно: приравняем в (4) выражение при U к нулю и будем искать V как некоторое ненулевое частное решение уравнения (с разделяющимися переменными)

$$V' + p(x)V = 0 \qquad (5)$$

Из (4), в силу равенства (5), находим, что другая неизвестная функция U должна удовлетворять уравнению

$$U'V = f(x). \qquad (6)$$

4) Подставив V(x) в уравнение (6), ищем его общее решение U=U(x,c).

5) Записываем общее решение уравнения (2) в виде $y = U(x)V(x)$.

6) Используя начальное условие ($2'$), получаем решение поставленной задачи Коши.

Записываем ответ в виде $y = \varphi(x)$.

Пример. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y' - \frac{2xy}{x^2-5} = (x^2 - 5)\sin x$$

с начальным условием y(0)=0.

Решение. Это линейное неоднородное уравнение, где

$$p(x) = -\frac{2x}{x^2-5}, \ f(x) = (x^2 - 5)\sin x.$$

1) Ищем решение уравнения в виде

$$y = U(x)V(x)$$

$$y' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x),$$

2) Подставляя значения y и y' в данное уравнение, придем к

$$U'V + UV' - \frac{2x}{x^2-5}UV = (x^2 - 5)\sin x.$$

Выносим во втором и третьем слагаемом U за скобки:

$$U'V + U(V' - \frac{2x}{x^2-5}V) = (x^2 - 5)\sin x. \qquad (7)$$

3) Выберем V так, чтобы выражение в скобках при U обратилось в ноль:

$$V' - \frac{2x}{x^2-5}V = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, решим его. Имеем

$$\frac{dV}{dx} - \frac{2x}{x^2-5}V = 0,$$

или, разделяя переменные, получим

$$\frac{dV}{V} - \frac{2x}{x^2-5}dx = 0.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dV}{V} - \int \frac{2x}{x^2-5}dx = c;$$

$$\ln|V| - \ln|x^2 - 5| = c.$$

Так как нас интересует ненулевое частное решение этого уравнения, положим c=0; тогда

$$\ln|V| = \ln|x^2 - 5|,$$

$$V = x^2 - 5.$$

4) Теперь уравнение ($*$) примет вид уравнения с разделяющимися переменными

$$U'(x^2 - 5) = (x^2 - 5)\sin x,$$

или

$$dU = \sin x dx;$$

интегрируем

$$\int dU = \int \sin x dx,$$
$$U = -\cos x + c.$$

5) Найдем искомую функцию y, помня, что $y = U(x)V(x)$.

Таким образом,

$$y = (-\cos x + c)(x^2 - 5) - \qquad (8)$$

общее решение.

6) Используя начальное условие y(0)=0, получаем

$$(-\cos 0 + c)(-5) = 0,$$

находим c=1 и подставляем в общее решение (8).

Ответ. $y=(1-\cos x)(x^2-5)$.

Задачи для решения.

Найти решения задач Коши.

1. $y' + y = e^x, \quad y(0) = 1;$ 2. $xy' - 3y = 4x^3, \quad y(1) = 0;$

3. $y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{1+x^2}; \quad y(1) = \ln 2;$ 4. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(1) = 8;$

5*. $y' \cos^2 x + y = tgx, \quad y(0) = 0.$

Индивидуальные задания.

Найти решения задач Коши.

1. $xy' + y - e^x = 0, \quad y(1) = 0;$ 2. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2, \quad y(1) = 4;$

3. $y' - ytgx = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0;$ 4. $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4, \quad y(0) = 0;$

5. $y' - \frac{2xy}{x^2+3} = (x^2+3)\cos x, \quad y(0) = 3.$

Контрольные вопросы

1. Назовите известные вам типы дифференциальных уравнений.
2. Каков общий вид линейного дифференциального уравнения первого порядка?
3. С помощью какой подстановки решается линейное дифференциальное уравнение первого порядка и к какому уравнению сводится его решение?

Приложение 6

Практические занятия №12

Решение задач на определение сходимости рядов. Разложение функций в ряд Маклорена.

знать: определение числового ряда; необходимый и достаточные признаки сходимости рядов.
уметь: определять сходимость числовых рядов.

Основные сведения из теории числовых рядов.

Пусть задана бесконечная числовая последовательность

$$U_1, U_2, U_3, ..., U_n, ...$$

Определение. Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел, соединенных знаком плюс, т.е. выражение вида

$$U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n + ...;$$

числа $U_1, U_2, U_3, ..., U_n, ...$ называются членами ряда.

Индекс, стоящий у каждого члена ряда, указывает его порядковый номер в ряде.

Сокращенно числовой ряд обозначается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n + ... \qquad (1)$$

Член U_n, номер которого не фиксирован, называется общим членом ряда.

Определение. Сумма первых n членов числового ряда (1)

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ называется n – ой частичной суммой.

Для каждого числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ можно построить последовательность его частичных сумм:

$$S_1 = U_1,$$
$$S_2 = U_1 + U_2,$$
$$S_3 = U_1 + U_2 + U_3,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Определение. Числовой ряд (1) называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм сходится, т.е. существует конечный предел

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} U_i.$$

Этот предел называют суммой ряда и записывают $S = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$, а разность $r_n = S - S_n$ - остатком ряда.

Замечание. Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда $\lim_{n \to \infty} r_n = 0.$

Если последовательность частичных сумм расходится, т.е., при неограниченном возрастании числа слагаемых $(n \to \infty)$ в частичной сумме, она или не имеет предела или её предел равен бесконечности, то ряд называют расходящимся.

Расходящийся ряд суммы не имеет.

Рассмотрим основные теоремы о сходимости числовых рядов.

Теорема 1. Сходимость или расходимость ряда не нарушится, если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда (сумма при этом изменится).

Теорема 2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится и имеет сумму S, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} cU_n = cS,$$

который получается из предыдущего умножением всех членов на одно и тоже число с, также сходится и имеет сумму cS.

Теорема 3. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать, т.е., если $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \Phi$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n \pm V_n)$ также сходится и имеет сумму $S \pm \Phi$.

Теорема 4 (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится, то его общий член U_n стремится к нулю, при неограниченном возрастании n, т.е. $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$.

Отсюда следует, что если $\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0$, то ряд расходится.

Замечание. Указанный признак не является достаточным, т.е. если $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$, то вопрос о сходимости ряда ещё не решен: он может быть как сходящимся так и расходящимся.

При рассмотрении числовых рядов практически решаются две задачи:

1) исследовать, сходится или расходится ряд;

2) зная, что ряд сходится, найти его сумму.

Мы будем решать первую задачу, т.е. исследовать ряды на сходимость.

Числовые ряды с положительными членами.

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \, . \qquad (1)$$

Определение. Если все члены ряда (1) $U_1, U_2, U_3, ..., U_n, ... > 0,$ то ряд называется знакоположительным.

Очевидно, в этом случае частичная сумма S_n возрастает с возрастанием n.

Поэтому положительный ряд либо сходится либо его сумма бесконечна, т.е.

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ или $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.$

Рассмотрим некоторые достаточные признаки сходимости и расходимости рядов с положительными членами.

Признак сравнения.

Пусть

$$U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \qquad (2)$$

и

$$V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} V_n - \qquad (3)$$

- два ряда с положительными членами.

Пусть члены ряда (2), начиная с некоторого номера n_0, меньше соответствующих членов ряда (3), т.е. $0 \le U_n < V_n \ (\forall n > n_0)$. Тогда

1) Если ряд (3) сходится, то ряд (2) также сходится. В этом случае ряд (3) называется мажорантой ряда (2).

Таким образом, положительный ряд сходится, если он обладает сходящейся мажорантой.

2) Если ряд (2) расходится, то ряд (3) также расходится.

Схематично суть признака сравнения выглядит так

$$\forall \ n > n_0 : \underset{\substack{\text{сход.}\Leftarrow\text{сход.} \\ \text{расх.}\Rightarrow\text{расх.}}}{U_n < V_n}$$

Теорема (предельная форма признака сравнения). Если для рядов (2) и (3) выполняется условие

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = r < \infty,$$

то рассматриваемые ряды одновременно сходятся или расходятся.

Чтобы с помощью признака сравнения исследовать ряды на сходимость, нужно иметь такие ряды, о которых заранее известно, сходятся они или расходятся.

Для сравнения обычно используются следующие эталонные ряды: геометрический, гармонический и другие.

Геометрический ряд

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$$

сходится при условии q < 1 и его сумма $S=\frac{a}{1-q}$; если $q\geq 1$, то геометрический ряд расходится.

Гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

расходится.

Обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле)

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

сходится, если $p>1$, и расходится, если $p\leq 1$.

Признак Даламбера.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ положительны и существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=k,$$

то при $k<1$ ряд сходится;

при $k>1$ ряд расходится;

при $k=1$ вопрос о том, сходится ряд или расходится, не решен и требуется дополнительное исследование с помощью других достаточных признаков сходимости.

Радикальный признак Коши.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ положительны и существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=k,$$

то при $k<1$ ряд сходится;

при $k>1$ ряд расходится;

при $k=1$ вопрос о том, сходится ряд или расходится, не решен и требуется дополнительное исследование с помощью других достаточных признаков сходимости.

Указание 1.

Постановка задачи. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}U_n,$$

где U_n содержит произведения многих сомножителей (например, факториалы).

План решения. Если при вычислении предела

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$$

можно сократить множители в числителе и знаменателе дроби $\frac{U_{n+1}}{U_n}$, то обычно применяют признак Даламбера.

1. Проверим, что $U_n>0$ при всех $n\geq 1$.
2. Найдем U_{n+1}. Для этого в формуле определения общего члена ряда U_n заменим n на n+1.
3. Вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=k.$
4. Применим признак Даламбера.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2^n(n^3-1)}{n!}$.

Решение.

1. Проверим, что члены ряда положительны. Действительно,

$\frac{2^n(n^3-1)}{n!} > 0$

при всех $n \ge 2$.

2. Найдем U_{n+1}:

$U_{n+1} = \frac{2^{n+1}((n+1)^3-1)}{(n+1)!}$.

3. Вычислим предел

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}((n+1)^3-1)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n(n^3-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n^3+3n^2+3n)}{(n+1)(n^3-1)} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+3n}{n^4+n^3-n-1} = 2\cdot 0 = 0.$$

4. Применим признак Даламбера. Так как k=0<1, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^3-1)}{n!}$$

сходится.

Указание 2.

Постановка задачи. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n}$ существует и легко вычисляется.

План решения. Если U_n имеет, например, вид $\left(\frac{2n+3}{n-1}\right)^{\frac{n}{3}}$ или $\left(\frac{3n^2+1}{3n^2+n+1}\right)^{n^2}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n}$ существует и легко вычисляется. В таком случае обычно применяют радикальный признак Коши.

1. Проверим, что $U_n>0$ при всех $n \ge 1$.

2. Вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = k$.

3. Применим радикальный признак Коши.

Замечание. Полезно иметь в виду, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \frac{n}{e}, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1,$$

где P(n) – многочлен относительно n.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\left(\frac{5}{2}\cdot 4\right) + \left(\frac{7}{3}\cdot 4\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\cdot 4\right)^3 + \left(\frac{11}{5}\cdot 4\right)^4 + \ldots$$

Решение. Общий член ряда имеет вид $U_n = \left(\frac{3+2n}{n+1}\cdot 4\right)^n$, где $n = 1,2,\ldots$

1 способ.

1. Проверим, что члены ряда положительны. Действительно,

$$U_n = \left(\frac{3+2n}{n+1}\cdot 4\right)^n > 0$$

при всех $n \ge 1$.

2. Вычислим предел

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{3+2n}{n+1}\cdot 4\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+2n}{n+1}\cdot 4 = 8.$$

3. Применим радикальный признак Коши. Так как $k = 8 > 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+2n}{n+1}\cdot 4\right)^n$$

расходится.

2 способ. Нарушается необходимый признак сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+2n}{n+1}\cdot 4\right)^n = +\infty,$$

а не ноль. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+2n}{n+1}\cdot 4\right)^{n}$ расходится.

Задачи для решения.

Исследовать сходимость рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{9n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3^n}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.07}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+n^2+2n-6}{n(n+1)^2(2n^2-1)}$ 6*. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{n^n}$

Ответы. 1. *Ряд расходится* $(k=5)$. 2. *Ряд сходится* $(k=2/3)$. 3. *Ряд расходится* $(k=+\infty)$ 4. *Ряд расходится* $\left(\lim\limits_{n\to\infty}U_n=1\right)$. 5. *Ряд сходится* $\left(\text{сравнить с рядом}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)$. 6. *Ряд расходится* $(k=4/e)$.

Индивидуальные задания.
Исследовать сходимость рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+n}{\sqrt[5]{n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3+n}{2n^3-1}\right)^{n}$ 4. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n(n+1)!}{3^n+2}$

5*. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$ 6*. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^3+6}{n^3+5}$

Ответы.
1. *Ряд сходится* $(k=0)$. 2. *Ряд расходится* 3. *Ряд расходится* $(k=3/2)$.
4. *Ряд расходится* 5. *Ряд сходится* $(k=1/2)$. 6. *Ряд сходится*.

Знакочередующиеся ряды.

Ряд вида

$$U_1-U_2+U_3-...+(-1)^{n+1}U_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n, \qquad (1)$$

где $U_n>0,\ n=1,2,3,...$ и два любых соседних члена имеют противоположные знаки, называется знакочередующимся.

Исследование сходимости таких рядов проводится на основании теоремы Лейбница – достаточного признака сходимости знакочередующегося ряда.

Теорема (Лейбница) Знакочередующийся ряд (1) сходится, если:
1) его члены монотонно убывают по абсолютной величине, т.е.
$U_1>U_2>U_3>...>U_n>...$ и
2) его общий член U_n стремится к нулю при $n\to\infty$, т.е.
$\lim\limits_{n\to\infty}U_n=0$.

Замечание. Сумма такого ряда положительна и не превосходит первого члена ряда U_1.

По знакочередующемуся ряду (1) можно построить соответствующий ему знакоположительный ряд

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n . \qquad (2)$$

Признак сходимости знакочередующегося ряда.

Если ряд (2), составленный из абсолютных величин членов ряда (1), сходится, то ряд (1) также сходится.

<u>Определение.</u> Знакочередующийся ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд (2), составленный из абсолютных величин членов ряда (1).

Сходящийся знакочередующийся ряд называется условно сходящимся, если ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Указание 1.

Постановка задачи.

Исследовать сходимость знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n,\ U_n > 0. \qquad (3)$$

План решения.

1. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

и проверим, что $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$ (если $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \neq 0,$ то ряд расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда).

2. Для определения характера полученного положительного ряда применим один из признаков сходимости, рассмотренных выше.

Если ряд из модулей сходится, то исходный ряд (3) сходится абсолютно.

3. Если ряд из модулей расходится, то возможно исходный ряд (3) сходится условно. Чтобы проверить это, применим признак Лейбница.

Если оба условия признака выполняются, то ряд сходится условно, в противном случае он расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2-1}{3n^3}.$$

Решение.

1. Составим ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{2n^2-1}{3n^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{3n^3} \qquad \left(U_n = \frac{2n^2-1}{3n^3}\right)$$

Проверим выполнение необходимого условия сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{3n^3} = 0.$$

2. Сравним полученный положительный ряд с гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \left(V_n = \frac{1}{n}\right),$$

о котором известно, что он расходится.

Получим

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2-1)n}{3n^3} = \frac{2}{3} < \infty,$$

тогда по теореме (предельная форма признака сравнения) ряд из модулей тоже расходится.

3. Проверим условия признака Лейбница:

1) члены ряда убывают по абсолютной величине:

$$\frac{1}{3} > \frac{7}{3\cdot 2^3} > \ldots > \frac{2n^2-1}{3n^3} > \ldots$$

2) члены ряда стремятся к нулю при $n \to \infty$ (см. п. 1).

Следовательно, по признаку Лейбница ряд сходится.

Ответ. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n^2-1}{3n^3}$ сходится условно.

Задачи для решения.

Исследовать сходимость рядов.

1.$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{3n+1}{n(n+2)}$ 2.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{10n+1}$

3.$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (\frac{3n+2}{2n})^n$ 4.$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n^2}{n^5+n^2+1}$

5*.$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-1}$ $(0<x<1)$

Ответы.

1.*Ряд сходится условно.* 2.*Ряд расходится* 3.*Ряд сходится условно.* 4.*Ряд сходится абсолютно.* 5.*Ряд сходится абсолютно.*

Индивидуальные задания.

Исследовать сходимость рядов.

1.$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2+3}{\sqrt{n^5}}$ 2.$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n^{10}}{3^n}$

3.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n5^n}$ 4.$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (\frac{2n+1}{3n+1})^n$ 5.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt[3]{n}}{n+2}$

Ответы.

1.*Ряд сходится условно.* 2.*Ряд расходится.* 3.*Ряд сходится абсолютно.* 4.*Ряд сходится абсолютно.* 5.*Ряд сходится условно.*

Контрольные вопросы

1. Дайте определение числового ряда.
2. Какой числовой ряд называется сходящимся, расходящимся?
3. Сформулируйте признаки сравнения (признак непосредственного сравнения и предельный признак). Как следует выбирать ряд для сравнения с исследуемым рядом?
4. В чем заключается сущность признака Даламбера, радикального признака Коши? Какие ряды удобно исследовать с помощью каждого из них?
5. Какой ряд называется знакочередующимся? Сформулируйте достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда?
6. Приведите примеры абсолютно сходящихся рядов.

1.Какие ряды называются функциональными рядами?

2.Какой признак применяют при исследовании степенных рядов на сходимость?

3.Выведите формулу Маклорена.

Приложение 7

Практические занятия №13
Построение графов. Решение комбинаторных задач

Информационные модели на графах

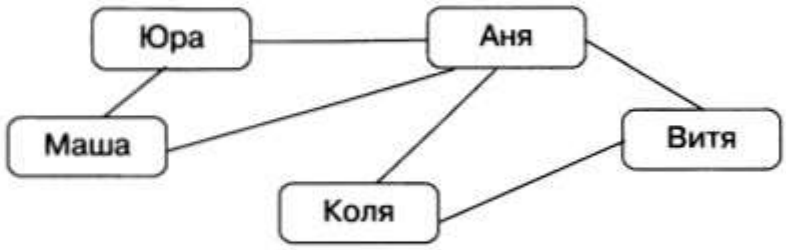
Наглядным средством представления состава и структуры системы является граф. Граф состоит из вершин, связанных линиями. Если линия направленная (со стрелкой), то она называется дугой; линия ненаправленная (без стрелки) называется ребром. Линия, выходящая из некоторой вершины и входящая в нее же, называется петлей. Вершины могут изображаться кругами, овалами, точками, прямоугольниками и т. д.

Если объекты некоторой системы изобразить вершинами, а связи между ними — линиями, то мы получим информационную модель рассматриваемой системы в форме графа.

Сети

Ранее мы рассматривали графы — схемы отношений, отражающие имеющиеся связи между объектами.

Например, граф, отражающий отношение «переписываются» между объектами класса «дети», может выглядеть, как показано на рисунке ниже:



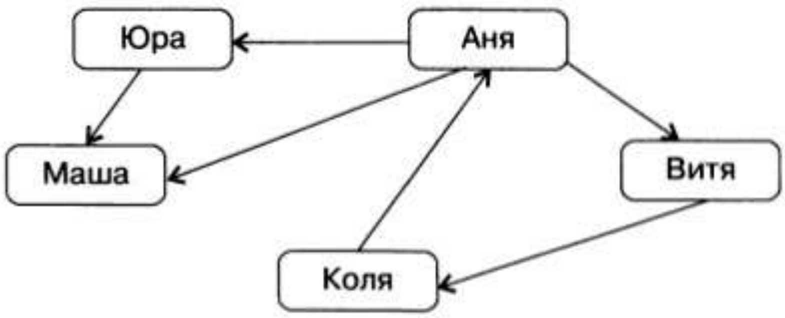
Отношение «переписываются» («пишут письма друг другу») является двухсторонним (симметричным). Поэтому соответствующие вершины соединены линиями без стрелок (ребрами). Граф называется неориентированным, если его вершины соединены ребрами.

Путь по вершинам и ребрам графа, включающий любое ребро графа не более одного раза, называется цепью.

Пример цепи: Юра- Аня- Витя- Коля.

Цепь, начальная и конечная вершины которой совпадают, называется циклом. Пример цикла: Аня- Коля- Витя — Аня.

Иначе выглядит граф, отражающий отношение «пишет письма» между теми же объектами класса «дети». Линии со стрелками (дуги) придают ему совершенно иной смысл:



Граф называется ориентированным, если его вершины соединены дугами.

Граф называется взвешенным, если его вершины или ребра (дуги) характеризуются некоторой дополнительной информацией — весом вершины или ребра (дуги).

На рисунке ниже информация о городах Золотого кольца представлена взвешенным графом: веса его вершин — года основания городов, веса ребер — расстояния в километрах между городами.

Граф с циклом называется сетью.

На следующем рисунке в виде графа представлена информационная модель сказки про Царевну-лягушку.

Вершины этого графа — персонажи и предметы из сказки, дуги — связи между ними. В отличие от предыдущих примеров, здесь все связи различны. Поэтому они подписываются рядом с соответствующими дугами.

Такой граф называется семантической сетью. Считается, что любую информацию можно представить в виде семантической сети, на которой будут отражены объекты (понятия) и связи (отношения) между ними.

Использование графов при решении задач

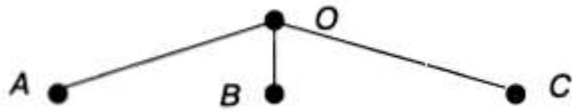
Графы удобно использовать при решении некоторых классов задач.

Задача 1

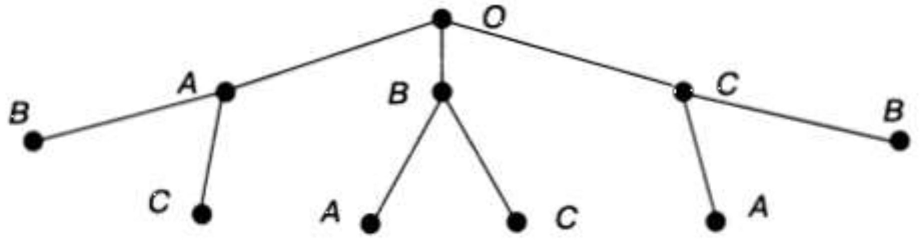
Сколькими способами можно рассадить в ряд на три стула трех учеников? Выписать все возможные случаи.

Решение этой задачи удобнее всего представить в виде дерева. За его корневую вершину возьмем произвольную точку плоскости О.

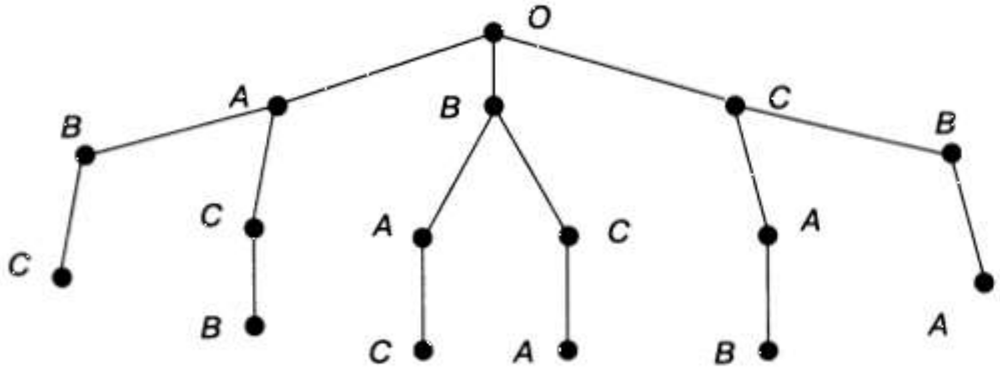
На первый стул можно посадить любого из трех учеников — обозначим их А, В и С. На схеме это соответствует трем ветвям, исходящим из точки О:



Посадив на первый стул ученика А, на второй стул можно посадить ученика В или С. Если же на первый стул сядет ученик В, то на второй можно посадить А или С. А если на первый стул сядет С, то на второй можно будет посадить А или В. Это соответствует на схеме двум ветвям, исходящим из каждой вершины первого уровня:



Очевидно, что третий стул в каждом случае займет оставшийся ученик. Это соответствует одной ветви дерева, которая «вырастает» на из предыдущих ветвей.



Выпишем все пути от вершин первого уровня к вершинам третьего уровня: А-В-С, А-С-В, В-А-С, В-С-А, С-А-В, С-В-А. Каждый из выписанных путей определяет один из вариантов рассаживания учеников на стулья. Так как других путей нет, то искомое число способов — 6.

Дерево можно не строить, если не требуется выписывать все возможные варианты, а нужно просто указать их число. В этом случае рассуждать нужно так: на первый стул можно усадить одного из трех человек, на второй — одного из двух оставшихся, на третий — одного оставшегося: 3 * 2 * 1 = 6.

Задача 2

Чтобы принести Царю-батюшке молодильные яблоки, должен Иван-царевич найти единственный верный путь к волшебному саду. Встретил Иван-царевич на развилке трех дорог старого ворона и вот какие советы от него услышал:

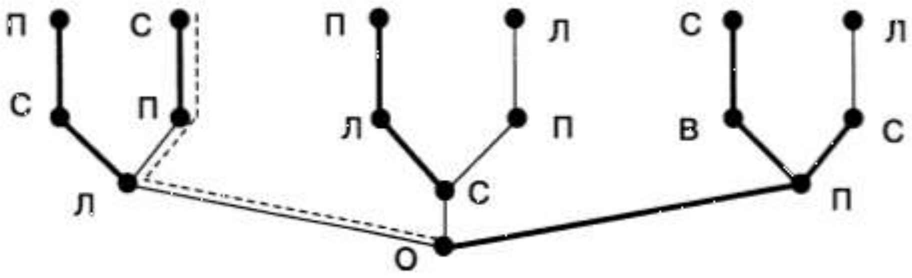
1. иди сейчас по правой тропинке;

2. на следующей развилке не выбирай правую тропинку;

3. на третьей развилке не ходи по левой тропинке.

Пролетавший мимо голубь шепнул Ивану-царевичу, что только один совет ворона верный и что обязательно надо пройти по тропинкам разных направлений. Наш герой выполнил задание и попал в волшебный сад. Каким маршрутом он воспользовался?

Обозначим левую, среднюю и правую тропинки соответственно Л, С и П. Возможные маршруты представим в виде графа. При этом подсказки ворона отметим более «жирными» ребрами. Так как только один совет ворона верен, то на графе ему будет соответствовать маршрут, имеющий одно «жирное» ребро. Этот маршрут обозначен дополнительной пунктирной линией:



Коротко о главном

Наглядным средством представления состава и структуры системы является граф. Граф состоит из вершин, связанных линиями. Направленная линия называется дугой, ненаправленная — ребром. Линия, выходящая из некоторой вершины и входящая в нее же, называется петлей. Граф называется взвешенным, если его вершины или ребра (дуги) характеризуются некоторой дополнительной информацией — весом вершины или ребра (дуги).

Путь по вершинам и ребрам графа, включающий любое ребро графа не более одного раза, называется цепью. Цепь, начальная и конечная вершины которой совпадают, называется циклом. Разновидность графа, содержащая циклы, называется сетью.

Иерархия — это расположение частей или элементов целого в порядке от высшего к низшему. Системы, элементы которых находятся в отношениях «является разновидностью», «входит в состав» и других отношениях подчиненности, называются иерархическими системами (системами с иерархической структурой).

Граф иерархической системы называется деревом. Отличительной особенностью дерева является то, что между любыми двумя его вершинами существует единственный путь. Деревья не содержат циклов и петель.

Практические занятия №14

Решение задач на теоремы сложения и умножения вероятности

Цель работы:
студент должен:
знать:
определение независимых событий;
теорему умножения вероятностей;
уметь:
вычислять вероятность независимых событий.

Сведения из теории:
Пусть вероятность события В не зависит от появления события А.
Событие называют независимым от события А, если появление события А не изменяет вероятности события В, т. е. если условная вероятность события В равна его безусловной вероятности:
$P_A(B) = P(B)$.
Итак, если событие В не зависит от события А, то событие А не зависит от события В; это означает, что свойство независимости событий взаимно.
Для независимых событий теорема умножения имеет вид:
$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$,
т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.
Два события называют независимыми, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют зависимыми.
На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.

Несколько событий называют попарно независимыми, если каждые два из них независимы. Например, события А, В, С попарно независимы, если независимы события А и В, А и С, В и С.

Пример 1
Пусть в урне имеется 4 шара, окрашенные: один – в красный цвет (А), один – в синий цвет (В), один – в черный цвет (С) и один – во все эти три цвета (АВС). Чему равна вероятность того, что извлеченный из урны шар имеет красный цвет?
Решение:
т.к. из четырех шаров два имеют красный цвет, то $P(A)=2/4=1/2$.
Рассуждая аналогично, найдем $P(B)=1/2$, $P(C)=1/2$.
Допустим теперь, что взятый шар имеет синий цвет, т. е. событие В уже произошло. Изменится ли вероятность того, что извлеченный шар имеет красный цвет, т. е. изменится ли вероятность события А?
Из двух шаров, имеющих синий цвет, один шар имеет и красный цвет, поэтому вероятность события А по-прежнему равна 1/2. Другими словами, условная вероятность события А, вычисленная в предположении, что наступило событие В, равна его безусловной вероятности. Следовательно, события А и В независимы.
Аналогично придем к выводу, что события А и С, В и С независимы. Итак, события А, В и С попарно независимы.
Независимы ли эти события в совокупности? Оказывается, нет.
Действительно, пусть извлеченный шар имеет два цвета, например синий и черный. Чему равна вероятность того, что этот шар имеет и красный цвет? Лишь один шар окрашен во все три цвета, поэтому взятый шар имеет и красный цвет.
Т.о., допустив, что события В и С произошли, приходим к выводу, что событие А обязательно наступит. Следовательно, это событие достоверное и вероятность его равна единице.
Другими словами, условная вероятность $P_{BC}(A)=1$ события А не равна его безусловной вероятности $P(A)=1/2$. Итак, попарно независимые события А, В, С не являются независимыми в совокупности.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:
$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$.

Пример 2
Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.
Решение:
вероятность появления герба первой монеты (событие А): $P(A)=1/2$.
Вероятность появления герба второй монеты (событие В): $P(B)=1/2$.
События А и В независимые, поэтому искомая вероятность по теореме умножения равна:
$P(AB)=P(A) \cdot P(B)=1/2 \cdot 1/2=1/4$.

Пример 3
Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.
Решение:
вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие А):
$P(A)=8/10=0{,}8$.
Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие В):
$P(B)=7/10=0{,}7$.
Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие С):
$P(C)=9/10=0{,}9$.
Так как события А, В и С независимые в совокупности, то искомая вероятность (по теореме умножения) равна:
$P(ABC)=P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)=0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9=0{,}504$.

Задания для самостоятельного решения:
Решите задачи:
1) Вероятность того, что в магазине будет продана пара мужской обуви 44-го размера, равна 0,12; 45-го – 0,04; 46-го и большего – 0,01. Найти вероятность того, что будет продана пара мужской обуви не меньше 44-го размера.
2) При условиях задачи 1 найти вероятность того, что очередной будет продана пара обуви меньше 44-го размера.
3) В ящике находятся 5 резцов: два изношенных и три новых. Производится два последовательных извлечения резцов. Определить условную вероятность появления изношенного резца при втором извлечении при условии, что извлеченный в первый раз резец в ящик не возвращается.
4) В урне находятся 5 белых шаров, 4 черных и 3 синих. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его в урну. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие А), при втором - черный (событие В) и при третьем – синий (событие С).

Контрольные вопросы:
1. Дайте определение независимых событий.
2. Какие события называются попарно независимыми?

Практические занятия №15

Построение гистограмм и полигонов

Цель работы:
студент должен:
знать:
- формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии, среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины; понятие гистограммы и полигона.
уметь:
- вычислять математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины. Изображать гистограммы и полигоны

Сведения из теории:
Случайные величины (дискретные и непрерывные) характеризуются своим законом распределения. Заметим, что это исчерпывающая характеристика в том смысле, что в законе распределения содержится вся информация о случайной величине. Никакой сколь угодно сложной математической обработкой наблюдаемых значений случайной величины о ней невозможно получить сведения, не содержащиеся в законе распределения. Однако этот закон часто неизвестен и о нем приходится судить на основе каких-то приближенных оценок. С другой стороны, для многих практических задач такая информация является избыточной: достаточно знать лишь некоторые количественные характеристики закона распределения.
Простейшей, но очень важной характеристикой является математическое ожидание.
Пусть, например, X - дискретная случайная величина распределена по закону:

X	x_1	x_2	…	$x_п$
P	p_1	p_2	…	$p_п$

Тогда ее математическое ожидание M(X) определяется равенством

$$M(X) = x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + \ldots + x_п\, p_п.$$

Обратим внимание на то, что хотя конкретные значения величины X являются случайными, математическое ожидание M(X) случайным не является.
Пусть, например, испытание состоит в бросании игрального кубика. Поскольку выпадение каждой грани равновозможно, Pi=1/6. Следовательно, математическое ожидание числа выпавших очков равно

$$M(X) = 1/6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21/6 = 3{,}5.$$

Число, близкое к этому, получится, если реально бросать кубик много раз и подсчитать сумму очков, деленную на число бросков.

Математическое ожидание и среднее арифметическое случайной величины - важные характеристики закона распределения, но, зная только их, мы имеем еще весьма одностороннее представление о нем. Не ясно, например, как велики могут быть отклонения значений величины от этих характеристик. Ведь одно и то же значение среднего арифметического наблюдаемых значений может получиться как в случае, когда все значения находятся вблизи среднего, так и в случае сколь угодно больших отклонений от него в сторону больших и меньших величин.
Для того чтобы характеризовать в среднем величины таких отклонений, вводится еще один важный параметр закона распределения, называемый дисперсией.
Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D\{X) = M[X- M(X)]^2.$$

Так же дисперсию можно вычислить и по формуле:

$$D\{X) = M(X^2)- [M(X)]^2,$$

т. е. как разность математического ожидания квадрата значений случайной величины и квадрата её математического ожидания.
Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Многие случайные величины, встречающиеся на практике, имеют размерность. Например, величины, которые встречаются при различных измерениях. Тогда, если, скажем, случайная величина измеряется в метрах, то дисперсия будет иметь размерность м^2. Поэтому вводится еще одна характеристика, называемая средним квадратическим отклонением, обозначается: $\sigma = \sqrt{D(X)}$. ее размерность совпадает с размерностью случайной величины.

Пример 111.
Пусть X – число очков, выпадающих при одном бросании игральной кости. Найти дисперсию случайной величины X.
Решение:
случайная величина X – число очков принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6. Составим закон её распределения:

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда её математическое ожидание:

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Найдем отклонения для $x_1, x_2, \ldots, x_6$:

$x_1^0=1-3{,}5$; $x_2^0=2-3{,}5$; $x_3^0=3-3{,}5$; $x_4^0=4-3{,}5$; $x_5^0=5-3{,}5$; $x_6^0=6-3{,}5$.

Вычислим дисперсию:

$$D(X) = \frac{1}{6}((1-3{,}5)^2 + (2-3{,}5)^2 + (3-3{,}5)^2 + (4-3{,}5)^2 + (5-3{,}5)^2 + (6-3{,}5)^2) = \frac{35}{12}.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант
1) Монету подбрасывают 7 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа появлений герба.
2) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	3	4	6	7
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

2 вариант
1) Игральную кость подбросили 5 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.
2) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

3 вариант
1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	4	7	10	13
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

2) Монету подбрасывают 6 раз. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – выпадения «решки».

4 вариант
1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	2	3	4	5
p	0,15	0,17	0,35	0,21	0,12

2) Монету подбрасывают 5 раз. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – выпадения герба.

5 вариант
1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

6 вариант
1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	10	30	40	60	70
p	0,3	0,13	0,45	0,1	0,02

3) Игральную кость подбросили 7 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.

X	1	5	10	15	20
p	0,1	0,11	0,2	0,22	0,37

3) Игральную кость подбросили 5 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.

7 вариант

1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	10	20	30
p	0,125	0,375	0,5

2) Правильная треугольная пирамида имеет пронумерованные грани 1, 2, 3, 4. Запишите закон распределения для выпадения номера грани, на которой стоит пирамида.

8 вариант

1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	10	30	50
p	0,175	0,35	0,475

2) Игральный кубик имеет пронумерованные грани 1, 2, 3, 4, 5, 6. Запишите закон распределения для выпадения номера грани, на которой стоит кубик.

Контрольные вопросы:

1.Что называется, математическим ожиданием дискретной случайной величины?

2.Что называется, дисперсией дискретной случайной величины?

Практические занятия №16

Показатели деятельности стационара. Медико-демографические показатели.

Студент должен знать:

- методику расчета экстенсивных, интенсивных показателей и средних величин;
- основные направления изучения народонаселения;
- основные принципы проведения переписей населения;
- показатели естественного и механического движения населения и их значение для практического здравоохранения

Студента должен уметь:

- вычислять и анализировать показатели естественного движения населения;
- вычислять экстенсивные и интенсивные показатели;
- вычислять средние величины методом средней арифметической взвешенной;
- применять полученные знания в практической деятельности;

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ

Экономика здравоохранения, являясь отраслью общественного здоровья и здравоохранения широко использует статистический метод, позволяющий изучать состояние здоровья населения, анализировать деятельность медицинских учреждений.

Статистика –это наука, изучающая количественную сторону массовых общественных явлений в неразрывной связи с их качественной стороной методом обобщающих показателей.

Раздел статистики, изучающий вопросы, связанные с медициной, гигиеной, общественным здоровьем называется санитарной статистикой

Основными показателями, применяемыми в санитарной статистике, являются:

1. Экстенсивный показатель – характеризует структуру изучаемого явления, отношения части явления к целому и выражается в % -это показатель структуры или удельного веса.

$$ЭП = \frac{Часть\_явления}{Целое\_явление} * 100\%$$

Для графической иллюстрации ЭП используют в основном секторную и столбиковую диаграммы.

2. Интенсивный показатель – характеризует распространенность и частоту изучаемого явления в своей среде, рассчитывается на 100,1000,10000,100000 и т.д. человек

$$ИП = \frac{Явление}{Среда} * 1000$$

Для графической иллюстрации ИП применяются в основном столбиковые и линейные диаграммы

3. Средние величины широко применяются при характеристиках физического развития (средний рост, вес), расчетах средней длительности пребывания в стационаре, средней длительности нетрудоспособности и др. Наиболее часто в санитарной статистике применяют среднюю арифметическую взвешенную, она рассчитывается по формуле:

$$M = \frac{VxP}{N},$$

где M- средняя арифметическая взвешенная

V- варианты

P- частоты

N –общее количество наблюдений

При оценке общественного здоровья населения в отечественной санитарной статистике используются типовые медико-статистические показатели:

1. Медико-демографические показатели:
2. Показатели заболеваемости
3. Показатели инвалидности
4. Показатели физического развития

1.Медико-демографические показатели

Демография – наука о народонаселении и его социально-экономическом развитии. Значение демографических данных для характеристики здоровья населения велико. Это и оценка здоровья населения, планирования сети мед. учреждений и кадров, прогнозирование состава населения.

Демография включает в себя два раздела: статика и динамика.

Статика – раздел демографии, занимающийся изучением численного состава населения на определенный момент.

Динамика – изучает естественное (рождаемость, смертность) и механическое (миграционные процессы) движение населения

1. Статика.

Одним из основных источников получения данных о численности и составе населения является перепись населения по рекомендации ООН перепись должна проводится каждые 10 лет. В России последняя перепись была проведена в 2010г. Первые попытки переписи населения предпринимались в древнейших цивилизациях Китая, Индии, Египта. В России первая перепись была проведена в 1718г. при Петре 1

Основные принципы проведения переписи: всеобщность, или охват всего населения; наличие единой программы переписи; одномоментность; сбор сведений непосредственно у населения, централизация и др. По данным последней переписи численность населения РФ составила 142,9 млн. человек., т.е. снизилась по сравнению с годом последней переписи (2003г.) на 1,9 млн. чел. Численность населения в годы между переписями определяется расчетным путем на основе данных последней переписи минус умершие, выбывшие и плюс прибывшие и родившиеся за год.

Перепись дает также сведения о составе населения (возрастном, половом, национальном), образовательном и профессиональном уровне, семейном положении.

Данные о численности населения позволяют рассчитать показатель плотности населения на 1 кв.м. территории, что чрезвычайно важно для планирования сети медицинских учреждений.

На основании расчета удельного веса населения идет его распределение на типы: прогрессивный, стационарный и регрессивный.

К прогрессивному_типу относят населения регионов, в которых доля детей от 0 до 14 лет превышает долю лиц старше 50 лет.

При регрессивном типе доля лиц старше 50 лет, превышает долю детей от 0 до 14 лет

При стационарном типе - доля детей равна доле лиц в возрасте 50лет и старше. В настоящее время в РФ регрессивный тип.

Показатели, характеризующие статику населения, имеют важное значение в практическом здравоохранении, они необходимы для расчета показателей естественного движения населения, планирования системы здравоохранения, расчета потребности в различных видах медицинской помощи, определения необходимого количества средств, выделяемых бюджетом на здравоохранение, организации противоэпидемической работы и др.

2. Динамика

<u>Механическое движение населения (миграция)</u>

Миграция происходит в результате передвижения отдельных групп людей из одного региона в другой (внутренняя миграция) или за пределы страны (внешняя миграция).

Миграция подразделяется: на безвозвратную, т.е. с постоянной сменой места жительства; временную – переселение на достаточно длительный, но ограниченный срок; сезонную - перемещение в определенные периоды года; маятниковую – регулярные поездки к месту работы или учебы за пределы своего населенного пункта. Интенсивность миграционных процессов вызывается различными социально-экономическими причинами.

Механическое движение население оказывает значительное влияние на санитарное состояние страны, т.к. может способствовать распространению инфекционных заболеваний и возникновению эпидемий.

<u>Естественное движение населения</u>

Под естественным движением населения понимается изменение численности населения в результате рождаемости и смертности. Статистика данных о естественном движении населения основывается на обязательной текущей регистрации отделами ЗАГСов рождений и смертей на основе мед. справок о рождении и врачебных свидетельств о смерти.

Рождаемость- это процесс пополнения численности населения в результате деторождения. Для измерения уровня и структуры рождаемости применяются следующие показатели:

1. Коэффициент рождаемости – дает общее, приближенное значение уровня рождаемости

$$КР = \frac{Численность\_родившихся\_за\_год}{Среднегодовая\_численность\_населения} * 1000$$

Общий КР менее 15,0 считается низким; от 16,0-24,0 средним; 25-29 выше среднего; 30-39 – высоким, более 40,0- очень высоким.

2. Коэффициент плодовитости является более точным информативным показателем

$$КП = \frac{Численность\_родившихся\_за\_год}{среднегодовая\_численность\_женщин\_ввозрасте\_15-49лет} * 1000$$

Показатели рождаемости являются не только демографическими показателями, но и важнейшими медико-социальными критериями жизнеспособности и воспроизводства населения. Сведения о рождаемости необходимых практике здравоохранения для организации служб родовспоможения, детских учреждений, а также для изучения и прогнозирования здоровья населения.

В России острой проблемой является низкий уровень рождаемости, однако в настоящее время отмечается положительная динамика этого показателя так в 2010г. он составил 12,4 на 1000 человек, (в 2002г. 9,1, в 2006- 10,2)

На уровень рождаемости оказывают влияние комплекс социально-биологических и социально-экономических факторов: положение женщины в обществе, социально-экономическое положение в семье и в стране, состояние системы охраны материнства и детства, национальные и религиозные традиции.

Смертность населения, как явление характеризует процесс убыли населения вследствие смерти и является важнейшим критерием оценки здоровья населения. Данные о умерших необходимы в практике здравоохранения для расчета численности и состава населения; планирования мероприятий по снижению заболеваемости, смертности, увеличению продолжительности жизни; разработке профилактических мероприятий.

Случаи смерти регистрируются по месту наступления события или по месту проживания умершего. Факт смерти удостоверяется «Врачебным свидетельством о смерти» Ф. № 106у или «Фельдшерская справка о смерти» ф. № 106-1у.(для сельской местности, где нет врачей) Регистрация смерти в органах ЗАГСа должна быть произведена родственниками в течение 3-х суток с момента наступления смерти.

Уровень смертности населения характеризуется следующими показателями:

1.Коэффициент смертности, который исчисляется на 1000 чел. населения

$$КС = \frac{Число\_умерших\_за\_год}{Среднегодовая\_численность\_населения} * 1000$$

Величина общего КС в значительной степени зависит от возрастного состава населения чем больше в стране или регионе удельный вес пожилых людей, тем КС может быть выше.

2. Кроме общего КС в санитарной статистике применяют возрастные и половые показатели смертности:

$$ВПС = \frac{Число\_умерших\_в\_данной\_возрастной\_группе}{Среняя\_численность\_тнаселения\_в\_данной\_группе} * 1000$$

$$ППС = \frac{Число\_умерших\_мужчин(женщин)}{Среднняя\_численность\_мужского(женского)\_населения} x1000$$

Общий показатель смертности населения России в 2010г. составил 14,2 на 1000 человек. По статистическим данным мужчины умирают в два раза чаще женщин.

В структуре причин смертности в России в 2010 г. ведущее место принадлежит болезням системы кровообращения, на их долю приходится более 50% всех случаев смерти, на втором месте злокачественные новообразования – 14,1 % на третьем месте внешние причины (несчастные случаи, ДТП, травмы, убийства, самоубийства – 12,2%,

Смертность различных возрастных групп населения не одинакова, наиболее высокая на 1-м году жизни, затем резко снижается, но начиная с 30 лет сначала медленно, а потом быстро поднимается вверх.

Специальные показатели смертности: младенческая, перинатальная:

Младенческая смертность характеризует число детей умерших в течение первого года жизни. Показатель рассчитывается за год на 1000 детей, родившихся живыми.

$$МС = \frac{Число\_умерших\_на\_первом\_году}{Число\_родившихся\_живыми\_за\_год} * 1000$$

Правильный и своевременный анализ этого показателя позволяет разработать конкретные мероприятия по снижению заболеваемости и смертности на 1-ом году жизни и охарактеризовать работу органов здравоохранения по охране материнства и детства.

В 20010 г. показатель МС в России составил 7,5 на 1000 родившихся живыми. Самые низкие показатели МС В Японии, Швеции и Финляндии 4,0-5,0 на 1000 родившихся живыми.

Перинатальная смертность включает в себя случаи мертворожденность и раннюю смертность новорожденных, на первой неделе жизни (неонатальную смертность)

$$ПС = \frac{Число\_мертворожденных + Число\_умерших\_на\_первой\_неделе}{Число\_родившихся\_живыми\_и\_мертвыми\_за\_год} * 1000$$

Учреждения здравоохранения осуществляют регистрацию в медицинской документации всех родившихся живыми и мертвыми, имеющих массу тела при рождении 500г. и более, независимо от признаков жизни. На каждый случай смертности в перинатальный период заполняется «Врачебное свидетельство о перинатальной смерти». По данным ВОЗ основными причинами ПС являются: внутриутробная асфиксия, асфиксия новорожденных, низкая масса тела при рождении, родовые травмы, внутриутробные инфекции. В 2010 году В России показатель ПС составил 6.1 на 1000 родившихся

Естественный прирост населения – Служит наиболее общей характеристикой роста населения. Он рассчитывается как разность между коэффициентами рождаемости и смертности. Положительное значение говорит о приросте, отрицательное об убыли. В настоящее время в России коэффициент естественного прироста населения составляет – 2,4 на 1000 населения (12,4-14,2= - 2,4). Низкий рост рождаемости при высоком уровне смертности указывает на неблагоприятную демографическую ситуацию в обществе и говорит о неблагополучии в обществе.

Средняя продолжительность предстоящей жизни – это число лет, которое в среднем предстоит прожить данному поколению. Для расчета этого показателя используются таблицы повозрастной смертности. Факторы, определяющие продолжительность жизни, делятся на социальные и биологические. К социальным относятся: характер труда, уровень обеспеченности материальными благами, медицинским обслуживанием, жилищные условия и т.д. К биологическим: пол, наследственность, природно-климатические условия, экология, и т.д. Биологические и социальные факторы тесно связаны между собой, но биологическая продолжительность жизни- длина жизни человеческого вида, обусловленная его генетической конституцией намного больше чем самые высокие величины фактической продолжительности жизни, на которую губительно влияют социальные и экологические условия.

Уровень средней продолжительности жизни в России составляет по данным 2010г. 70,3года, женщин-74,8 лет, мужчин- лет по величине ожидаемой средней продолжительности жизни мужчин Россия занимает 135 место, а женщин 100 место в мире. В настоящее время наиболее высокая средняя продолжительность жизни у населения в Норвегии, Швейцарии, Японии.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение понятию «здоровье»
2. Что такое общественное здоровье и какие факторы его определяют?
3. Что изучает демография?
4. Что вызнаете о переписи населения?

5. Что такое механическое движение населения, его виды и значение?
6. Назовите основные демографические показатели
7. Что такое интенсивные и экстенсивные показатели?
8. Как рассчитывается показатели естественного прироста населения?
9. Порядок государственной регистрации рождений и смертей
10. Как рассчитываются показатели младенческой и перинатальной смертности?
11. Как рассчитывается средняя арифметическая взвешенная?
12. Как Вы можете характеризовать демографическую ситуацию в России
13. Что такое «средняя продолжительность предстоящей жизни»?

Программа проведения промежуточной аттестации
по дисциплине ЕН.02. Математика

1. Общие положения

Целью промежуточной аттестации по дисциплине ЕН.02. Математика является оценка степени соответствия качеству образования студентов требованиям ФГОС СПО.

Процедура промежуточной аттестации по дисциплине ЕН.02. Математика разрабатывается академией самостоятельно и доводится до сведения обучающихся в течение первых двух месяцев от начала обучения. Промежуточная аттестация проводится в виде экзамена.

Для проведения промежуточной аттестации обучающихся преподавателем созданы фонды оценочных средств.

Содержание материалов промежуточной аттестации по дисциплине ЕН.02. Математика отвечает требованиям ФГОС СПО по специальности 31.02.01 Лечебное дело утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации 12.05.2014 № 514

Результаты экзамена обучающихся фиксируются оценками. Оценка – это результат процесса оценивания, условно-формальное (знаковое), количественное выражение оценки учебных достижений, обучающихся в цифрах, буквах или иным образом.

Оценка качества подготовки обучающихся и выпускников осуществляется в двух основных направлениях:

- оценка уровня освоения программно-учебного материала;
- оценка компетенций обучающихся.

Уровень освоения программно-учебного материала в академии фиксируются следующими оценками: «5» (отлично), «4» (хорошо), «3» (удовлетворительно), «2» (неудовлетворительно), «1» (плохо), «зачтено», «не зачтено». Допускается сокращение слов: «отл.», «хор.», «удовл.», «неудовл.».

Оценка «5» ставится в случае, если обучающийся исчерпывающе знает весь программно-учебный материал, отлично понимает и прочно усвоил его. На вопросы (в пределах программы) дает правильные, сознательные и уверенные ответы. В различных практических заданиях умеет самостоятельно пользоваться полученными знаниями. В устных ответах и письменных работах пользуется литературно правильным языком и не допускает ошибок.

Оценка «4» ставится, если обучающийся знает весь требуемый программой учебный материал, хорошо понимает, и прочно усвоил его. На вопросы (в пределах программы) отвечает без затруднений. Умеет применять полученные знания в практических заданиях. В устных ответах пользуется литературным языком и не делает грубых ошибок. В письменных работах допускает только незначительные ошибки.

Оценка «3» ставится, если обучающийся знает основной программно-учебный материал. При применении знаний на практике испытывает некоторые затруднения и преодолевает их с небольшой помощью преподавателя. В устных ответах допускает ошибки при изложении материала и в построении речи. В письменных работах делает ошибки.

Оценка «2» ставится в случае, когда у обучающегося обнаруживается незнание большой части программного материала, отвечает, как правило, лишь при помощи наводящих вопросов преподавателя, неуверенно. В письменных работах допускает частые и грубые ошибки.

Оценка «1» ставится в случае, когда у обучающегося обнаруживается полное незнание проходимого программно-учебного материала.

Для оценки компетенций, обучающихся используется дихотомическая система:

0 – оценка отрицательная, компетенция не освоена,

1 – оценка положительная, компетенция освоена.

Сформированность общих компетенций при проведении экзамена по дисциплине ЕН.02. Математикапроверяется путем наблюдения.

Экзамен по дисциплине ЕН.02. Математикапроводится непосредственно после завершения освоения программы дисциплины.

Оценка, полученная обучающимся на экзамене, является определяющей независимо от полученных в семестре оценок текущего контроля успеваемости.

Оценки за экзамен заносятся в зачетно-экзаменационную ведомость, зачетные книжки обучающихся, журнал учета занятий.

Если студент не явился на экзамен, независимо от причины, в ведомости указывается «не аттестован».

При наличии уважительных причин, с разрешения ректора академии, которое оформляется приказом, обучающемуся может быть разрешена досрочная сдача экзамена в соответствии с утвержденным индивидуальным планом.

При наличии уважительных причин, с разрешения ректора академии, которое оформляется приказом, обучающемуся может быть продлена (перенесена на другие сроки) сдача экзамена в соответствии с утвержденным индивидуальным планом.

Обучающийся, не согласный с результатами экзамена, имеет право на пересмотр результатов на основании заявления. В этом случае приказом ректора создается комиссия для решения спорных вопросов. Решение комиссии оформляется протоколом, который доводится до сведения, обучающегося и преподавателя.

2. Порядок проведения экзамена по дисциплине ЕН.01. Математика

Экзамен – это форма оценки знаний, умений и практического опыта, навыков самостоятельной работы, способности применять их в решении практических задач, проверка уровня сформированности общих и профессиональных компетенций, полученных обучающимися в процессе изучения дисциплины ЕН.01. Математика.

Расписание экзаменов утверждается ректором и доводится до сведения преподавателей и обучающихся не позднее, чем за две недели до начала экзаменов.

Экзамены проводятся в период промежуточной аттестации или в специально отведенные дни, установленные календарным учебным графиком согласно утвержденному расписанию экзаменов.

Перед экзаменом планируется проведение консультаций за счет общего числа консультационных часов на группу.

Перенос экзаменов запрещается. В исключительных случаях он возможен на основании приказа ректора академии.

Экзаменационные материалы, составленные на основе актуальных разделов и тем рабочей программы дисциплины ЕН.02. Математикаотражены в фонде оценочных средств.

К экзаменационным материалам относятся: экзаменационные вопросы, задачи, ситуации, тесты.

На основе разработанного и объявленного обучающимся перечня вопросов и практических задач, ситуаций, рекомендуемых для подготовки к экзамену, составлены экзаменационные материалы, содержание которых до обучающихся не доводится. Тестовые вопросы и практические задачи носят равноценный характер.

Количество заданий в экзаменационных билетах два.

К началу экзамена подготовлены следующие документы:

- программа промежуточной аттестации;
- экзаменационные билеты (и /или экзаменационные материалы);
- наглядные пособия, материалы справочного характера, нормативные документы и образцы, разрешенные к использованию на экзамене;
- журнал учебной группы;
- зачетно-экзаменационная ведомость;
- зачетные книжки.

Экзамен принимается, преподавателем, который вел учебные занятия по дисциплине ЕН.02. Математикав экзаменуемой группе. На сдачу устного экзамена предусматривается не более одной трети академического часа на каждого обучающегося, на сдачу письменного экзамена – не более шести академических часов на учебную группу.

Оценка, полученная на экзамене, заносится преподавателем в зачетно-экзаменационную ведомость (в том числе и неудовлетворительная). В зачётную книжку неудовлетворительная оценка не выставляется. Экзаменационная оценка по учебному предмету, дисциплине, междисциплинарному курсу (модулю), практикам за данный семестр является определяющей, независимо от полученных в семестре оценок текущего контроля по учебному предмету, дисциплине, междисциплинарному курсу (модулю), практикам.

Присутствие на экзамене посторонних лиц без разрешения ректора или его заместителей не допускается.

Письменный экзамен проводится одновременно со всем составом учебной группы. Письменные работы выполняются на бумаге со штампом академии.

Обучающийся, испытывающий затруднения при подготовке к ответу по выбранному билету, имеет право на второй билет с соответствующим продлением времени на подготовку к ответу. При окончательной оценке ответа оценка снижается на один балл. Выдача третьего билета не разрешается.

С целью повышения оценки допускается повторное прохождение промежуточной аттестации, но не более чем по трем учебным предметам, дисциплинам, междисциплинарным курсам, профессиональным модулям. Для этого обучающийся пишет заявление на имя ректора, которое визируют куратор, заместитель ректора по учебной работе.

Обучающемуся, использующему в ходе экзамена неразрешенные источники и средства для получения информации (в том числе использование мобильного телефона), выставляется неудовлетворительная оценка.

В случае неявки обучающегося на экзамен, преподавателем делается в зачетно-экзаменационной ведомости отметка «не аттестован».

Хорошо успевающим обучающимся, выполнившим лабораторные, практические занятия по дисциплинам, междисциплинарным курсам текущего семестра и не имеющим задолженности по дисциплинам, междисциплинарным курсам, не выносимым на экзаменационную сессию, может быть разрешена сдача экзаменов досрочно, без освобождения обучающихся от текущих учебных занятий. Досрочная сдача разрешается только при наличии приказа ректора академии.

Академия определяет перечень наглядных пособий, материалов справочного характера, нормативных документов и различных образцов, которые разрешены к использованию на экзамене.

Результаты экзаменов (полученные оценки) сообщаются обучающимся в день сдачи устного экзамена и на следующий день после сдачи письменного экзамена.

Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации в форме экзамена

<table>
<tr><td rowspan="2">Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация «Академия технологии и управления»</td><td>ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1
Для специальности
31.02.01Лечебное дело</td><td rowspan="2">Преподаватель дисциплины

____
Абеева Э.А.</td></tr>
<tr><td>Дисциплина:
<u>ЕН.02. Математика</u></td></tr>
</table>

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задание.
2. Покажите подробное решение заданий в Части Б.

Последовательность и условия выполнения частей задания:

1. Приступайте к выполнению задания после внимательного ознакомления с условием задачи. Приступайте к выполнению самого легкого на Ваш взгляд задания. Вспомните нужную формулу.
2. Сделайте необходимые записи на черновике.
3. Проверьте существование всех возможных вариантов решений.
4. Внимательно перепишите на беловик.

Вы можете воспользоваться калькулятором.

Часть А.

Задание №1 - Задание№15 (5 минут)

Часть Б.

Задание №1 - Задание№5 (9 минут)

Максимальное время выполнения задания – 120 мин./час.

Раздаточные и дополнительные материалы

Текст задания

Часть А.

1. Вычислить производную функции $y = \cos x$ в точке $x_0 = 0$.

а) 1; б) 4; в) 0; г) -2.

2. Найти производную функции $y = \dfrac{3}{x^2 - 1}$.

а) $y' = -\frac{6x}{x^2-1}$; б) $y' = -\frac{6x}{(x^2-1)^2}$; в) $y' = -\frac{3x}{(x^2-1)^2}$; г) $y' = -\frac{1}{2x}$.

3.Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + 2$ в точке $x_0 = 1$.

а) $y = 2x+1$; б) $y = -2x+1$; в) $y = 2x-1$; г) $y = 2x$.

4.Если производная $y' = 5x+7$, $dx = 0{,}1$, $x_0 = 2$, то $dy = ?$

а) 1,7 б) 2 в) 0,1 г) 0,5

5.Найти производные второго порядка: y=5x.

а) 0 б)5 в) 1 г) -1

6. Вычислить z''_{xy} от функции $z = x^3 + 3x^2y - y^3$ в точке A(1;1).

а) 1; б) 3; в) 0; г) 4.

7. Найти $|gradz|$ функции $z = x^3 + 3x^2y - y^3$ в точке A(1;1).

а) 3; б) 6; в) 6; г) 9.

8.Найти полный дифференциал, если $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5$, $dx = 0{,}1$, $dy = 0{,}2$.

а)0,9 б)0,1 в) 0,2 г)0,5

9. Найти производную по направлению, если $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 5$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -3$.

а) $4\sqrt{2}$ б) $\frac{8}{\sqrt{2}}$ в) 0 г) 1

10.Найти наибольшее значение функции $y(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 1$ на отрезке [-2;0].

а)4,5 б) -1 в)-16 г)0

11. Найти интеграл $\int (5x^2 + 7\sin x)dx$.

а) $\frac{5}{3}x^3 - 7\cos x + C$; б) $10x + 7\cos x + C$; в) $10x^3 - 7\cos x + C$; г) $\frac{5}{3}x^3 + 7\cos x + C$.

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 + x$, $x = 0$, $x = 2$.

а) 8; б) 19; в) 5; г) 10.

13.Найдите $A \cup (B \setminus C)$, если $A = (-\infty;15]$, $B = [-10;25)$, $C = (5;+\infty)$.

14. Вычислить $(\sqrt{3} + 3i)^2$

а) $6\sqrt{3}i - 6$ б) $\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$ в) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ г) $2 + 10i$

15. Методом Рунге-Кутта найти значение k_1 (для первого приближения функции y), определяемого уравнением $y' = x + 2y$, при начальном условии $y(0) = 1$, полагая $h = 0{,}1$.

а) 0,1; б) 0,2; в) 0,6; г) 0,7.

Часть Б.

1. Представить в тригонометрической форме комплексное число: 2+4i

2.Найти приближенно: $\ln 1{,}05$

3. Найти частные производные z'_x и z'_y от функции $z = x^3 + 3x^2y - y^3$.

4. Вычислить (заменой) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$.

а) $\sqrt{1+e^x} + C$; б) $2\sqrt{1+e^x} + C$; в) $2\sqrt[3]{1+e^x} + C$; г) $-2\sqrt{1-e^x} + C$.

5. Вычислить (по частям) $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$.

Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация «Академия технологии и управления»	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2 **Для специальности** **31.02.01Лечебное дело** Дисциплина: **ЕН.02. Математика**	Преподаватель дисциплины Абеева Э.А.

Вариант № 2

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задание.
2. Покажите подробное решение заданий в Части Б.

Последовательность и условия выполнения частей задания:

1. Приступайте к выполнению задания после внимательного ознакомления с условием задачи. Приступайте к выполнению самого легкого на Ваш взгляд задания. Вспомните нужную формулу.
2. Сделайте необходимые записи на черновике.
3. Проверьте существование всех возможных вариантов решений.
4. Внимательно перепишите на беловик.

Вы можете воспользоваться калькулятором.

Часть А.

Задание №1-Задание№15 (5 минут)

Часть Б.

Задание №1-Задание№5 (9 минут)

Максимальное время выполнения задания – 120 мин./час.

Раздаточные и дополнительные материалы

Текст задания

Часть А.

1. Вычислить производную функции $y = 2x^3$ в точке $x_0 = 2$.

а) 24; б) 14; в) 0; г) 2.

2. Найти производную функции $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$.

а) $y' = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$; б) $y' = \dfrac{1}{1 - \sin x}$; в) $y' = \dfrac{1}{1 + \sin x}$; г) $y' = -\dfrac{1}{1 - \sin x}$.

3.Составить уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 - 1$ в точке $x_0 = 1$.

а) $y = -4x + 2$; б) $y = -4x + 3$; в) $y = 4x - 1$; г) $y = 4x - 3$.

4.Если производная $y' = 2x - 3$, $dx = 0{,}1$, $x_0 = 2$, то $dy = ?$

а)0,1 б) 2 в) 0,5 г) 7

5. Найти производные второго порядка: $y=7x$.

а)0 б) 1 в) 7 г)2

6. Вычислить z''_{xy} от функции $z = x^2 + x^2y^2 - y^3$ в точке $A(1;1)$.

а) 1; б) 3; в) 0; г) 4.

7. Найти $|gradz|$ функции $z = x^2 + x^2y^2 - y^3$ в точке $A(1;1)$.

а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{2}$; г) $\sqrt{17}$.

8.Найти полный дифференциал, если $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -5$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3$, $dx = 0{,}1$, $dy = 0{,}2$.

а)0,1 б) 2 в) 0,5 г) 7

9. Найти производную по направлению, если $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 4$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -3$.

а) $\frac{7}{2}$ б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ в) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ г)0

10.Найти наименьшее значение функции $y(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке [-3;2].

а)4,5 б) -1 в)-16 г)2

11. Найти интеграл $\int (2x^3 - 5\sin x - 1)dx$.

а) $6x - 5\cos x + C$; б) $\frac{x^4}{2} - 5\cos x - C$; в) $\frac{x^4}{4} - 5\cos x - x + C$; г) $\frac{x^4}{2} + 5\cos x - x + C$.

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4x, \quad x = 1, \quad x = 2.$

а) 3; б) 9; в) 5; г) 6.

13. Даны множества A=[0;+∝) и B=(–∝;0]. Найдите $A \cup B$

14. Вычислить $\frac{4+3i}{1-i}$

а) $6\sqrt{3}i - 6$ б) $\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$ в) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ г) $2 + 10i$

15. Методом Рунге-Кутта найти значение k_1 (для первого приближения функции y), определяемого уравнением $y' = x - y$, при начальном условии $y(0) = 1$, полагая $h = 0{,}1$.

а) -0,1; б) 0,2; в) -0,6; г) 0,7.

Часть Б.

1. Представить в тригонометрической форме комплексное число: $\sqrt{3} - i$

2.Найти приближенно: $\sqrt{17}$

3. Найти частные производные z'_x и z'_y от функции $z = x^2 + x^2y^2 - y^3$.

4. Вычислить (заменой) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

а) $-\sqrt{1+x^2} + C$; б) $\sqrt{1+x^2} + C$; в) $2\sqrt[3]{1+x^2} + C$; г) $2\sqrt{1+x^2} + C$.

5. Вычислить (по частям) $\int_0^{\pi} x\sin x dx$.

<table>
<tr><td rowspan="2">Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация «Академия технологии и управления»</td><td>ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3
Для специальности
31.02.01Лечебное дело</td><td>Преподаватель дисциплины</td></tr>
<tr><td>Дисциплина:
<u>ЕН.02. Математика</u></td><td>Абеева Э.А.</td></tr>
</table>

Вариант № 3

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задание.
2. Покажите подробное решение заданий в Части Б.

Последовательность и условия выполнения частей задания:

1. Приступайте к выполнению задания после внимательного ознакомления с условием задачи. Приступайте к выполнению самого легкого на Ваш взгляд задания. Вспомните нужную формулу.
2. Сделайте необходимые записи на черновике.
3. Проверьте существование всех возможных вариантов решений.
4. Внимательно перепишите на беловик.

Вы можете воспользоваться калькулятором.

Часть А.

Задание №1-Задание№15 (5 минут)

Часть Б.

Задание №1-Задание№5 (9 минут)

Максимальное время выполнения задания – 120 мин./час.

Раздаточные и дополнительные материалы

Текст задания

Часть А.

1. Вычислить производную функции $y = arctgx$ в точке $x_0 = 1$.

а) 1/3; б) 4; в) 1/4; г) 1/2.

2. Найти производную функции $y = \cos^2 \frac{x}{2}$.

а) $y' = -\frac{\sin x}{2}$; б) $y' = 2\cos\frac{x}{2}$; в) $y' = -\sin\frac{x}{2}$; г) $y' = -2\sin^2\frac{x}{2}$.

3.Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^3 + 1$ в точке $x_0 = 1$.

а) $y = 2x + 1$; б) $y = x + 1$; в) $y = 3x - 1$; г) $y = 3x$.

4.Если производная $y' = 3x - 4$, $dx = 0{,}5$, $x_0 = \frac{1}{3}$, то $dy = ?$

а)-1,5 б)1,5 в)0,5 г)4

5.Найти производные второго порядка: y=1000x.

а) 0 б) 1 в)10 г)100

6. Вычислить z''_{xy} от функции $z = x^2 - y^2 + y^3 x$ в точке $A(1;1)$.

а) 2; б) $\sqrt{3}$; в) 0; г) 5.

7. Найти $|gradz|$ функции $z = x^2 - y^2 + y^3 x$ в точке $A(1;1)$.

а) $\sqrt{10}$; б) 3; в) 0; г) $\sqrt{7}$.

8.Найти полный дифференциал, если $\frac{\partial z}{\partial x} = 4$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 34$, $dx = 0{,}1$, $dy = 0{,}2$.

а)7,3 б) 0,21 в)1 г)7,2

9. Найти производную по направлению, если $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = 0$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 4$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -3$.

а)7,3 б) 0,21 в)4 г)7,2

10.Найти наибольшее значение функции $y(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке [-1;1].

а)4,5 б) 66 в)-16 г)-9

11. Найти интеграл $\int (x^2 + \sqrt{x} - e^x \ )dx$.

а) $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{\sqrt{x}} - e^x + C$; б) $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - e^x + C$; в) $2x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - e^x + C$; г) $2x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - e^{x+1} + C$.

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 2x, \quad x = 0, \quad x = 3.$

а) 3; б) 9; в) 5; г) 4.

13. Даны множества A=[0;+∝) и B=(–∝;0]. Найдите $A \cap B$

14.Вычислить $(2+2i)(3+2i)$

а) $2+10i$ б) $\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i$ в) $6\sqrt{3}i - 6$ г) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

15. Методом Рунге-Кутта найти значение k_1 (для первого приближения функции y), определяемого уравнением $y' = 2x - y$, при начальном условии $y(0) = 1$, полагая $h = 0{,}1$.

а) -0,1; б) 0,2; в) -0,6; г) 0,7.

Часть Б.

1. Представить в тригонометрической форме комплексное число: i

2.Найти приближенно: $\sqrt[3]{7}$

3.Найти частные производные z'_x и z'_y от функции $z = x^2 - y^2 + y^3 x$.

4. Вычислить (заменой) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}} dx$.

а) $arctgx^3 + C$; б) $\sqrt{1+x^2} + C$; в) $\frac{1}{3}arctgx^3 + C$; г) $-\frac{1}{3}arcctgx^3 + C$.

5. Вычислить (по частям) $\int_0^1 xe^x dx$.

Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация «Академия технологии и управления»	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 4 **Для специальности 31.02.01Лечебное дело**	Преподаватель дисциплины
	Дисциплина: **<u>ЕН.02. Математика</u>**	Абеева Э.А.

Вариант № 4
Инструкция
1. Внимательно прочитайте задание.
2. Покажите подробное решение заданий в Части Б.
Последовательность и условия выполнения частей задания:
1. Приступайте к выполнению задания после внимательного ознакомления с условием задачи. Приступайте к выполнению самого легкого на Ваш взгляд задания. Вспомните нужную формулу.
2.Сделайте необходимые записи на черновике.
3. Проверьте существование всех возможных вариантов решений.
4. Внимательно перепишите на беловик.
Вы можете воспользоваться калькулятором.
Часть А.
Задание №1-Задание№15 (5 минут)
Часть Б.
Задание №1-Задание№5 (9 минут)
Максимальное время выполнения задания – <u>120</u> мин./час.
Раздаточные и дополнительные материалы
Текст задания
Часть А.
1. Вычислить производную функции $y = \sin x$ в точке $x_0 = 0$.
а) 5; б) 1; в) 0; г) 3.
2. Найти производную функции $y = \sqrt{1-x^2}$.
а) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $y' = \dfrac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-2x}}$.
3.Составить уравнение касательной к графику функции $y = 4x^3 - 1$ в точке $x_0 = 1$.
а) $y = 12x - 9$; б) $y = -12x + 4$; в) $y = 12x - 1$; г) $y = 12x - 5$.
4.Если производная $y' = 3x + 7$, $dx = 0{,}3$, $x_0 = 2$, то $dy = ?$
а) 1,7 б) 2 в) 0,1 г) 3,9
5.Найти производные второго порядка: $y=-x$.
а) 0 б)5 в) 1 г) -1
6. Вычислить z''_{xy} от функции $z = x^2y^2 + y^2x$ в точке $A(1;1)$.
а) 6; б) 3; в) 0; г) 5.
7. Найти $|gradz|$ функции $z = x^2y^2 + y^2x$ в точке $A(1;1)$.
а) 2; б) $\sqrt{3}$; в) 0; г) 5.
8.Найти полный дифференциал, если $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0{,}5$, $dx = 0{,}1$, $dy = 0{,}2$.
а)7,3 б) 0,21 в)1 г)0,5
9. Найти производную по направлению, если $\cos\alpha = 0{,}5$, $\cos\beta = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3$.
а)7,3 б) 0,21 в)4 г)2

10.Найти наибольшее значение функции $y(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке [0;4].

а)119 б) 66 в)-16 г)-9

11. Найти интеграл $\int (5x^4 + \cos 3x - \frac{1}{x})dx$.

а) $20x^3 - 3\sin 3x - \ln|x| + C$; б) $x^5 + \frac{1}{3}\sin 3x - \ln|x| + C$;

в) $x^5 + 3\sin 3x - \ln|x| + C$; г) $x^5 + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{x^2} + C$.

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2, \quad x = -1, \quad x = 0.$

а) 8/3; б) 9/5; в) 5; г) 1/3.

13. Даны множества A=[0;+∞) и B=(–∞;0]. Найдите $A \backslash B$.

14.Вычислить $\frac{2+i}{4-3i}$

а) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ б) $6\sqrt{3}i - 6$ в) $2 + 10i$ г) $\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$

15. Методом Рунге-Кутта найти значение k_1 (для первого приближения функции y), определяемого уравнением $y' = x + y^2$, при начальном условии $y(0) = 1$, полагая $h = 0{,}1$.

а) -0,1; б) 0,2; в) -0,6; г) 0,1.

Часть Б.

1. Представить в тригонометрической форме комплексное число: $1 - i\sqrt{3}$

2. Найти приближенно: $\sqrt{3}$

3. Найти частные производные z'_x и z'_y от функции $z = x^2 y^2 + y^2 x$.

4. Вычислить (заменой) $\int \frac{x}{x^2 - 5}dx$.

а) $\ln|x^2 - 5| + C$; б) $2\ln|x^2 - 5| + C$; в) $-4\ln|x^2 - 5| + C$; г) $\frac{1}{2}\ln|x^2 - 5| + C$.

5. Вычислить (по частям) $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$.

Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация «Академия технологии и управления»	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 5 **Для специальности** **31.02.01Лечебное дело** Дисциплина: **ЕН.02. Математика**	Преподаватель дисциплины Абеева Э.А.

Вариант № 5

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задание.
2. Покажите подробное решение заданий в Части Б.

Последовательность и условия выполнения частей задания:

1. Приступайте к выполнению задания после внимательного ознакомления с условием задачи. Приступайте к выполнению самого легкого на Ваш взгляд задания. Вспомните нужную формулу.
2. Сделайте необходимые записи на черновике.
3. Проверьте существование всех возможных вариантов решений.
4. Внимательно перепишите на беловик.

Вы можете воспользоваться калькулятором.

Часть А.

Задание №1-Задание№15 (5 минут)

Часть Б.

Задание №1-Задание№5 (9 минут)

Максимальное время выполнения задания – 120 мин./час.

Раздаточные и дополнительные материалы

Текст задания

Часть А.

1. Вычислить производную функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$.

а) 1; б) 1/4; в) 1/2; г) 2.

2. Найти производную функции $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$.

а) $y' = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}$; б) $y' = \frac{2e^x}{1-e^x}$; в) $y' = -\frac{e^x}{(1-e^x)^2}$; г) $y' = \frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$.

3. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + 3$ в точке $x_0 = 3$.

а) $y = 6x+1$; б) $y = -x+1$; в) $y = 6x-6$; г) $y = 4x-6$.

4.Если производная $y' = -3x^2$, $dx = 0,5$, $x_0 = \frac{1}{3}$, то $dy = ?$

а) $-\frac{1}{6}$ б) 3 в) 0,5 г)0,33

5.Найти производные второго порядка: $y = \frac{1}{x}$.

а) $\frac{2}{x^3}$ б) $-\frac{1}{x^2}$ в) $\frac{1}{x^3}$ г) $\frac{2}{x^2}$

6. Вычислить z''_{xy} от функции $z = xy^2 + yx$ в точке $A(1;1)$.

а) 7; б) 3; в) 4; г) 5.

7. Найти $|gradz|$ функции $z = xy^2 + yx$ в точке $A(1;1)$.

а) 2; б) $2\sqrt{3}$; в) $\sqrt{13}$; г) $5\sqrt{3}$.

8.Найти полный дифференциал, если $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2$, $dx=0{,}1$, $dy=0{,}2$.

а)1,1 б) 0,02 в) 0,5 г) 0,2

9. Найти производную по направлению, если $\cos\alpha=\sqrt{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=4$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-3$.

а)1 б) $\frac{9}{\sqrt{3}}$ в) 9 г) $3\sqrt{3}$

10.Найти наибольшее значение функции $y(x)=x^4-8x^2-9$ на отрезке [0;3].

а)4,5 б) 0 в)-16 г)-9

11. Найти интеграл $\int(3x^2+\sqrt[3]{x})dx$.

а) $6x^3+\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}}+C$; б) $x^3+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$; в) $x^3+\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}+C$; г) $x^3+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+C$.

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x,\quad x=2,\quad x=4.$

а) 3; б) 4; в) 5; г) 6.

13.Даны множества A=[0;+∞) и B=(–∞;0]. Найдите $C_R A$

14.Вычислить $(2+i)(4-2i)$

а) $6\sqrt{3}i-6$ б) $6i-6$ в) 10 г) $22-6i$

15. Методом Рунге-Кутта найти значение k_1 (для первого приближения функции y), определяемого уравнением $y'=x^2+y$, при начальном условии $y(0)=1$, полагая $h=0{,}1$.

а) -0,1; б) 0,4; в) 0,1; г) 0,7.

Часть Б.

1. Представить в тригонометрической форме комплексное число: $\sqrt{3}+\sqrt{3}i$

2.Найти приближенно: $(1{,}02)^5$

3. Найти частные производные z'_x и z'_y от функции $z=xy^2+yx$.

4. Вычислить (заменой) $\int\frac{x}{(x+1)^2}dx$.

а) $\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+C$; б) $2\ln|x+1|+C$; в) $\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$; г) $\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$.

5. Вычислить (по частям) $\int_0^{\pi}x\cos x dx$.

Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация «Академия технологии и управления»	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 6 **Для специальности** **31.02.01Лечебное дело** Дисциплина: **ЕН.02. Математика**	Преподаватель дисциплины Абеева Э.А.

Вариант № 6
Инструкция
1. Внимательно прочитайте задание.
2. Покажите подробное решение заданий в Части Б.
Последовательность и условия выполнения частей задания:
1. Приступайте к выполнению задания после внимательного ознакомления с условием задачи. Приступайте к выполнению самого легкого на Ваш взгляд задания. Вспомните нужную формулу.
2.Сделайте необходимые записи на черновике.
3. Проверьте существование всех возможных вариантов решений.
4. Внимательно перепишите на беловик.
Вы можете воспользоваться калькулятором.
Часть А.
Задание №1-Задание№15 (5 минут)
Часть Б.
Задание №1-Задание№5 (9 минут)
Максимальное время выполнения задания – 120 мин./час.
Раздаточные и дополнительные материалы
Текст задания
Часть А.

1. Вычислить производную функции $y = \frac{1}{x^3}$ в точке $x_0 = 1$.
а) 1/3; б) -3; в) 1; г) 2.
2. Найти производную функции $y = x \ln x$.
а) $y' = \ln x + \frac{1}{x}$; б) $y' = \ln x + x$; в) $y' = \ln x + 1$; г) $y' = \ln x - 1$.
3. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^3/3$ в точке $x_0 = -1$.
а) $y = 3x + 1$; б) $y = x + 1$; в) $y = x - 1/3$; г) $y = x + 2/3$.
4.Если производная $y' = -3x^3$, $dx = 0{,}5$, $x_0 = \frac{1}{3}$, то $dy = ?$

а) $-\frac{1}{18}$ б) 3 в) 0,5 г)0,33

5.Найти производные второго порядка: $y = -\frac{1}{x}$.

а) $-\frac{2}{x^3}$ б) $-\frac{1}{x^2}$ в) $\frac{1}{x^3}$ г) $\frac{2}{x^2}$

6. Вычислить z''_{xy} от функции $z = 4xy^2 - 5yx$ в точке $A(1;1)$.
а) 7; б) 3; в) 4; г) 5.
7. Найти $|gradz|$ функции $z = 4xy^2 - 5yx$ в точке $A(1;1)$.
а) 2; б) $2\sqrt{3}$; в) $3\sqrt{2}$; г) $\sqrt{10}$.

8.Найти полный дифференциал, если $z'_x = 12$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$, $dx = 0{,}1$, $dy = 0{,}2$.

а)1,6 б) 0,02 в) 0,5 г) 0,2

9. Найти производную по направлению, если $\cos\alpha = \sqrt{3}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 12$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3$.

а)1 б) $\sqrt{3}$ в) 9 г) $\dfrac{33}{\sqrt{3}}$

10.Найти наибольшее значение функции $y(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке [-1;1].

а)4,5 б) 0 в)-16 г)-9

11. Найти интеграл $\int (6x^5 + \sin 2x - e^x)dx$.

а) $x^6 - \dfrac{1}{2}\cos 2x - e^x + C$; б) $30x^4 - \dfrac{1}{2}\sin 2x - e^x + C$;

в) $x^6 - 2\sin 2x - e^x + C$; г) $x^6 + \dfrac{1}{2}\sin 2x - e^x + C$.

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 16 - x, \quad x = 0, \quad x = 1$.

а) 34/6; б) 4/5; в) 31/2; г) 16.

13. Даны множества A=[–5;7] и B=[–2;20]. Найдите $C_R B$

14.Вычислить $\dfrac{i-1}{1+i}$

а) $\sqrt{3}i - 4$ б) $6i - 6$ в) i г) $22 - 6i$

15. Методом Рунге-Кутта найти значение k_1 (для первого приближения функции y), определяемого уравнением $y' = x - y$, при начальном условии $y(0) = 1$, полагая $h = 0{,}1$.

а) 1,8; б) 0,2; в) 1,6; г) 0,7.

Часть Б.

1. Представить в тригонометрической форме комплексное число: $-3i$

2. Вычислить приближенно: $\sqrt[3]{28}$

3. Найти частные производные z'_x и z'_y от функции $z = 4xy^2 - 5yx$.

4. Вычислить (заменой) $\int \dfrac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx$.

а) $\ln|x+1| - \dfrac{1}{x+1} + C$; б) $\ln|x+1| + \dfrac{1}{x+1} + C$; в) $2\sqrt{x} + \dfrac{\ln^2 x}{2} + C$; г) $\sqrt{x} + \dfrac{\ln^2 x}{2} + C$.

5. Вычислить (по частям) $\int\limits_0^{\pi/2} x \sin x dx$.

Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация «Академия технологии и управления»	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7 **Для специальности 31.02.01Лечебное дело** Дисциплина: **ЕН.02. Математика**	Преподаватель дисциплины Абеева Э.А.

Вариант № 7

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задание.
2. Покажите подробное решение заданий в Части Б.

Последовательность и условия выполнения частей задания:

1. Приступайте к выполнению задания после внимательного ознакомления с условием задачи. Приступайте к выполнению самого легкого на Ваш взгляд задания. Вспомните нужную формулу.
2. Сделайте необходимые записи на черновике.
3. Проверьте существование всех возможных вариантов решений.
4. Внимательно перепишите на беловик.

Вы можете воспользоваться калькулятором.

Часть А.

Задание №1-Задание№15 (5 минут)

Часть Б.

Задание №1-Задание№5 (9 минут)

Максимальное время выполнения задания – 120 мин./час.

Раздаточные и дополнительные материалы

Текст задания

Часть А.

1. Вычислить производную функции $y = e^{2x}$ в точке $x_0 = 0$.

а) 1; б) 3; в) 0; г) 2.

2. Найти производную функции $y = \ln(x^2 + 5)$.

а) $y' = \dfrac{2x}{x^2+5}$; б) $y' = \dfrac{x}{x^2+5}$; в) $y' = \dfrac{x}{2x^2+5}$; г) $y' = \dfrac{1}{x^2+5}$.

3. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x^3}$ в точке $x_0 = 0$.

а) $y = 2x$; б) $y = 0$; в) $y = x$; г) $y = 3$.

4.Если производная $y' = -3x^2 + 1$, $dx = 0{,}5$, $x_0 = \dfrac{1}{3}$, то $dy = ?$

а) $\dfrac{1}{3}$ б) 3 в) 0,5 г)0,33

5.Найти производные второго порядка: $y = \dfrac{1}{x^2}$.

а) $\dfrac{2}{x^3}$ б) $-\dfrac{1}{x^2}$ в) $\dfrac{1}{x^3}$ г) $\dfrac{6}{x^4}$

6. Вычислить z''_{xy} от функции $z = x^3y^2 + y + x$ в точке $A(1;1)$.

а) 6; б) 3; в) 4; г) 5.

7. Найти $|gradz|$ функции $z = x^3y^2 + y + x$ в точке $A(1;1)$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 5.

8.Найти полный дифференциал, если $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$, $dx = \dfrac{1}{2}$, $dy = 0{,}2$.

а)1,1 б) 0,02 в) 0,5 г) 0,9

9. Найти производную по направлению, если $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 4$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -3$.

а)1 б) $\frac{8-3\sqrt{2}}{2}$ в) 9 г) $\frac{9}{\sqrt{3}}$

10.Найти наименьшее значение функции $y(x) = 4x^3 - 2x$ на отрезке [0;3].

а)4,5 б) 63 в)-16 г)-9

11. Найти интеграл $\int (8x^7 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x})dx$.

а) $x^8 + \sqrt{x} + \ln|3x| + C$; б) $7x^6 + 2\sqrt{x} + \ln|x| + C$; в) $x^8 + 2\sqrt{x} + \ln|3x| + C$;

г) $x^8 + 2\sqrt{x} + 3\ln|x| + C$.

12 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 3x + 2, \quad x = 0, \quad x = 1.$

а) 7/2; б) 4/5; в) 5/6; г) 1.

13.Даны множества *A*=[–5;7] и *B*=[–2;20]. Найдите C_R***A*.**

14. Вычислить $(2+3i)(2-6i)$

а) $6i - 6$ б) $\sqrt{3}i - 4$ в) i г) $22 - 6i$

15. Методом Рунге-Кутта найти значение k_1 (для первого приближения функции y), определяемого уравнением $y' = x + 3y$, при начальном условии $y(0) = 1$, полагая $h = 0{,}1$.

а) -0,1; б) 0,2; в) -0,6; г) 0,3.

Часть Б.

1. Представить в тригонометрической форме комплексное число: 1

2.Найти приближенно: $\sqrt{26}$

3. Найти частные производные z'_x и z'_y от функции $z = x^3y^2 + y + x$.

4. Вычислить (заменой) $\int \frac{x^3}{1+x^8}dx$.

а) $\frac{1}{4}arctg\frac{x}{4} + C$; б) $arctg\frac{x}{4} + C$; в) $\frac{1}{3}arctgx^3 + C$; г) $-\frac{1}{3}arcctgx^3 + C$.

5. Вычислить (по частям) $\int_0^2 e^x(3-2x)dx$.

Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация «Академия технологии и управления»	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 8 **Для специальности** **31.02.01Лечебное дело** Дисциплина: **ЕН.02. Математика**	Преподаватель дисциплины Абеева Э.А.

Вариант № 8
Инструкция
1. Внимательно прочитайте задание.
2. Покажите подробное решение заданий в Части Б.
Последовательность и условия выполнения частей задания:
1. Приступайте к выполнению задания после внимательного ознакомления с условием задачи. Приступайте к выполнению самого легкого на Ваш взгляд задания. Вспомните нужную формулу.
2.Сделайте необходимые записи на черновике.
3. Проверьте существование всех возможных вариантов решений.
4. Внимательно перепишите на беловик.
Вы можете воспользоваться калькулятором.
Часть А.
Задание №1-Задание№15 (5 минут)
Часть Б.
Задание №1-Задание№5 (9 минут)
Максимальное время выполнения задания – 120 мин./час.
Раздаточные и дополнительные материалы
Текст задания
Часть А.
1. Вычислить производную функции $y = \ln x$ в точке $x_0 = 1$.
а) 1; б) -1; в) 0; г) 2.
2. Найти производную функции $y = (2x^3 + 5)^4$.
а) $y' = 24x(2x^3 + 5)^3$; б) $y' = 12x^2(2x^3 + 5)^3$; в) $y' = 24x^2(2x^3 + 5)^3$;
г) $y' = 4x(2x^3 + 5)^3$.
3. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x^3}$ в точке $x_0 = 1$.
а) $y = \frac{1}{2}x + 1$; б) $y = -2x$; в) $y = 2x - 1$; г) $y = \frac{1}{2}(3x - 1)$.
4.Если производная $y' = -x^2$, $dx = 0{,}5$, $x_0 = \frac{1}{3}$, то $dy = ?$

а) $\frac{1}{18}$ б) 3 в) 0,5 г)0,33

5.Найти производные второго порядка: $y = \frac{5}{x}$.

а) $\frac{10}{x^3}$ б) $-\frac{1}{x^2}$ в) $\frac{1}{x^3}$ г) $\frac{2}{x^2}$

6. Вычислить z''_{xy} от функции $z = 3xy^2 + 2yx$ в точке $A(1;1)$.
а) 7; б) 3; в) 8; г) 5.
7. Найти $|gradz|$ функции $z = 3xy^2 + 2yx$ в точке $A(1;1)$.
а) 26; б) $\sqrt{89}$; в) $6\sqrt{47}$; г) $\sqrt{39}$.

8.Найти полный дифференциал, если $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{2}$, $dx=0{,}1$, $dy=\sqrt{2}$.

а)2,1 б) 0,02 в) 0,5 г) 0,2

9. Найти производную по направлению, если $\cos\alpha=\sqrt{3}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=4$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-3$.

а)1 б) $3\sqrt{3}$ в) 9 г) $\frac{9}{\sqrt{3}}$

10.Найти наименьшее значение функции $y(x)=x^4+5x^2+1$ на отрезке [-1;2].

а)-1 б) 0 в)-16 г)1

11. Найти интеграл $\int(6\sin 2x-\sqrt{x})dx$.

а) $12\cos 2x-2x^{\frac{3}{2}}+C$; б) $-3\cos 2x-2x^{\frac{3}{2}}+C$; в) $-3\cos x-2x^{\frac{3}{2}}+C$;

г) $-3\cos 2x-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}+C$.

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x+4,\quad x=0,\quad x=1.$

а) 1/6; б) 4/5; в) 9/2; г) 1.

13.Даны множества A=[–5;7] и B=[–2;20]. Найдите $B\backslash A$.

14.Вычислить $(1-\sqrt{3}i)^2$

а) $6i-5$ б) $-2-2\sqrt{3}i$ в) 1 г) $6i-6$

15. Методом Рунге-Кутта найти значение k_1 (для первого приближения функции y), определяемого уравнением $y'=x-y$, при начальном условии $y(0)=1$, полагая $h=0{,}1$.

а) -0,4; б) 0,2; в) -0,6; г) 0,7.

Часть Б.

1. Представить в тригонометрической форме комплексное число: $2+i2\sqrt{3}$

2.Найти приближенно: $\sqrt[3]{25}$

3. Найти частные производные z'_x и z'_y от функции $z=3xy^2+2yx$.

4. Вычислить (заменой) $\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$.

а) $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$; б) $\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$; в) $\frac{3}{2}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$; г) $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^5}+C$.

5. Вычислить (по частям) $\int_1^e \ln x dx$.

Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация «Академия технологии и управления»	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 9 **Для специальности 31.02.01Лечебное дело**	Преподаватель дисциплины
	Дисциплина: **<u>ЕН.02. Математика</u>**	Абеева Э.А.

Вариант № 9

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задание.
2. Покажите подробное решение заданий в Части Б.

Последовательность и условия выполнения частей задания:

1. Приступайте к выполнению задания после внимательного ознакомления с условием задачи. Приступайте к выполнению самого легкого на Ваш взгляд задания. Вспомните нужную формулу.
2. Сделайте необходимые записи на черновике.
3. Проверьте существование всех возможных вариантов решений.
4. Внимательно перепишите на беловик.

Вы можете воспользоваться калькулятором.

Часть А.

Задание №1-Задание№15 (5 минут)

Часть Б.

Задание №1-Задание№5 (9 минут)

Максимальное время выполнения задания – <u>120</u> мин./час.

Раздаточные и дополнительные материалы

Текст задания

Часть А.

1. Вычислить производную функции $y = tgx$ в точке $x_0 = 0$.

а) -1; б) 7; в) 0; г) 1.

2. Найти производную функции $y = x^2 e^x$.

а) $y' = 2xe^x$; б) $y' = xe^x$; в) $y' = e^x(x+2)$; г) $y' = xe^x(x+2)$.

3. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 2$.

а) $y = 4x+1$; б) $y = 4x-4$; в) $y = 4x-5$; г) $y = 4x$.

4.Если производная $y' = -3x - x^2$, $dx = 0{,}5$, $x_0 = \frac{1}{3}$, то $dy = ?$

а) $-\frac{5}{9}$ б) 3 в) 0,5 г)0,33

5.Найти производные второго порядка: $y = \frac{3}{x}$.

а) $\frac{2}{x^3}$ б) $-\frac{1}{x^2}$ в) $\frac{6}{x^3}$ г) $\frac{2}{x^2}$

6. Вычислить z''_{xy} от функции $z = x^3y^2 + 2yx$ в точке $A(1;1)$.

а) 7; б) 3; в) 4; г) 8.

7. Найти $|gradz|$ функции $z = x^3y^2 + 2yx$ в точке $A(1;1)$.

а) 32; б) $\sqrt{41}$; в) $\sqrt{27}$; г) $\sqrt{33}$.

8.Найти полный дифференциал, если $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e$, $dx = 0{,}1$, $dy = 0{,}2$.

а)1,1 б) 0,02 в) 0,64 г) 0,2

9. Найти производную по направлению, если $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 4$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -3$.

а)1 б) $\sqrt{3}$ в) 9 г) $\frac{-3}{\sqrt{3}}$

10.Найти наименьшее значение функции $y(x) = x^4 + 5x^2 - 9$ на отрезке [0;3].

а)4,5 б) 0 в)-16 г)-25

11.Найти интеграл $\int (x + 7\sin 7x - e^{2x})dx$.

а) $1 + 49\cos 7x - 2e^{2x} + C$; б) $\frac{x^2}{2} + \cos 7x - 2e^{2x} + C$; в) $\frac{x^2}{2} - 7\cos 7x - \frac{1}{2}e^{2x} + C$;

г) $\frac{x^2}{2} - \cos 7x - \frac{1}{2}e^{2x}C$.

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x$, $x = 1$, $x = 3$.

а) 9; б) 3; в) 12; г) 4.

13.Даны множества A=[–5;7] и B=[–2;20]. Найдите $A \backslash B$.

14.Вычислить $\frac{2}{1 - \sqrt{3}i}$

а) $6\sqrt{3}i - 6$ б) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ в) $\sqrt{3}i - 4$ г) $6i - 5$

15. Методом Рунге-Кутта найти значение k_1 (для первого приближения функции y), определяемого уравнением $y' = x - 5y$, при начальном условии $y(0) = 1$, полагая $h = 0{,}1$.

а) -0,1; б) 0,2; в) -0,5; г) 0,7.

Часть Б.

1. Представить в тригонометрической форме комплексное число: $6i$

2.Найти приближенно: $\sin 59^0$

3. Найти частные производные z'_x и z'_y от функции $z = x^3y^2 + 2yx$.

4. Вычислить (заменой) $\int \frac{arctg\,\frac{x}{2}}{4 + x^2}dx$.

а) $(arctg\,\frac{x}{2})^2 + C$; б) $\frac{1}{4}(arctgx)^2 + C$; в) $\frac{1}{4}(arctg\,\frac{x}{2})^2 + C$; г) $\frac{1}{4}(arctg\,\frac{x}{2})^8 + C$.

5. Вычислить (по частям) $\int_1^e x\ln x dx$.

Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация «Академия технологии и управления»	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 4 **Для специальности** **31.02.01Лечебное дело**	Преподаватель дисциплины
	Дисциплина: **<u>ЕН.02. Математика</u>**	Абеева Э.А.

Вариант № 10

Инструкция

1. Внимательно прочитайте задание.
2. Покажите подробное решение заданий в Части Б.

Последовательность и условия выполнения частей задания:

1. Приступайте к выполнению задания после внимательного ознакомления с условием задачи. Приступайте к выполнению самого легкого на Ваш взгляд задания. Вспомните нужную формулу.
2. Сделайте необходимые записи на черновике.
3. Проверьте существование всех возможных вариантов решений.
4. Внимательно перепишите на беловик.

Вы можете воспользоваться калькулятором.

Часть А.

Задание №1-Задание№15 (5 минут)

Часть Б.

Задание №1-Задание№5 (9 минут)

Максимальное время выполнения задания – <u>120</u> мин./час.

Раздаточные и дополнительные материалы

Текст задания

Часть А.

1. Вычислить производную функции $y = \arcsin x$ в точке $x_0 = 0$.

а) 3; б) 1; в) 0; г) 2.

2. Найти производную функции $y = \sin^3 \frac{x}{3}$.

а) $y' = 3\cos^2 \frac{x}{3}$; б) $y' = \sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}$; в) $y' = 3\sin^2 \frac{x}{3}$; г) $y' = \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}$.

3. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $x_0 = \pi$.

а) $y = -x + \pi$; б) $y = -2x + \pi$; в) $y = x - \pi$; г) $y = x$.

4.Если производная $y' = -3 + x^2$, $dx = 0{,}5$, $x_0 = \frac{1}{3}$, то $dy = ?$

а) $-\frac{13}{9}$ б) 3 в) 0,5 г)0,33

5.Найти производные второго порядка: $y = x^2$.

а) $\frac{2}{x^3}$ б) -2 в) $2x$ г) 2

6. Вычислить z''_{xy} от функции $z = 3xy^2 + y^2 - x$ в точке $A(1;1)$.

а) 7; б) 3; в) 4; г) 6.

7. Найти $|gradz|$ функции $z = 3xy^2 + y^2 - x$ в точке $A(1;1)$.

а) 17; б) $2\sqrt{17}$; в) $3\sqrt{17}$; г) $5\sqrt{17}$.

8.Найти полный дифференциал, если $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\sqrt{17}}{8}$, $dx=0{,}1$, $dy=\sqrt{17}$.

а)1,1 б) 0,02 в) 2,225 г) 0,2

9. Найти производную по направлению, если $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-3$.

а)1 б) $\dfrac{-3}{5\sqrt{3}}$ в) 9 г) $\dfrac{9}{\sqrt{3}}$

10. Найти наименьшее значение функции $y(x)=x^4-x^2$ на отрезке [4;9].

а)240 б) 6480 в)-16 г)-9

11. Найти интеграл $\int\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$.

а) $2\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+C$; б) $\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+C$; в) $2\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x^3}}+C$; г) $2\sqrt{x^3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+C$.

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2+1,\quad x=1,\quad x=4$.
а) 13; б) 24; в) 25; г) 21.
13.Даны множества A=[–7;7] и B=[–2;2]. Найдите $A\backslash B$.

14.Вычислить $(3+\sqrt{2}i)^2$
а) $i-6$ б) $i+4$ в) $6i-5$ г) $7+6\sqrt{2}i$
15. Методом Рунге-Кутта найти значение k_1 (для первого приближения функции y), определяемого уравнением $y'=x+6y$, при начальном условии $y(0)=1$, полагая $h=0{,}1$.
а) 0,1; б) 0,2; в) -0,6; г) 0,6.

Часть Б.

1. Представить в тригонометрической форме комплексное число: $1+i\sqrt{3}$
2.Найти приближенно: ln1,005
3. Найти частные производные z'_x и z'_y от функции $z=3xy^2+y^2-x$.
4. Вычислить (заменой) $\int e^{-(x^2+1)}xdx$.

а) $(arctg\,\dfrac{x}{2})^2+C$; б) $\dfrac{1}{2e^{x^2+1}}+C$; в) $e^{x^2+1}+C$; г) $-\dfrac{1}{2e^{x^2+1}}+C$.

5. Вычислить (по частям) $\int_e^{2e}\ln x dx$.

Эталоны ответов

№ В	№ Задания Часть А.														
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1	Б	Б	А	А	А	Г	Г	А	Б	А	А	Г	(-∞;5)	А	Б
2	А	Б	Г	А	А	Г	Г	А	В	Г	Г	Г	(-∞;+∞)	Б	А
3	Г	А	В	А	А	Г	А	Г	В	Г	Б	Б	0	А	А
4	Б	Б	А	Г	А	А	Г	Г	Г	А	Б	Г	(0;+∞)	А	Г
5	Б	Г	В	А	А	Б		В	Г	Б	Б	Г	(-∞;0)	В	В
6	Б	В	Г	А	А	Б	Г	Г	Г	В	А	В	(-∞;-2) и (20;+∞)	В	Б
7	Г	А	Б	А	Г	А	Г	Г	Б	Б	Г	А	(-∞;-5) и (7;+∞)	Г	Г
8	А	В	Г	А	А	В	Б	А	Б	Г	Г	В	(7; 20]	Б	А
9	Г	Г	Б	А	В	Г	Б	В	Г	Г	Г	Г	[-5; -2)	Б	В
10	Б	Б	В	А	Г	Г	Б	В	Б	А	А	Б	[-7; -2) и (2; 7]	Г	Г

Часть Б.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	$2\sqrt{5}(\cos(arctg\,2)+i\sin(arctg\,2))$	0,05	$z'_x=3x^2+6xy$; $z'_y=3x^2-3y^2$	Б	$\frac{\pi}{2}-1$
2	$2(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))$	1/8	$z'_x=2x+2xy^2$; $z'_y=2yx^2-3y^2$	Б	1
3	$\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$	23/12	$z'_x=2x+y^3$; $z'_y=-2y+3y^2x$	В	1
4	$2(\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3}))$	1,75	$z'_x=2xy^2+y^2$; $z'_y=2yx^2+2yx$	Г	1
5	$2\sqrt{3}(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}))$	1,1	$z'_x=2xy+y$; $z'_y=x^2+x$	Г	-2
6	$3(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}))$	28/9	$z'_x=4y^2-5y$; $z'_y=8xy-5x$	В	1
7	$1(\cos 0+i\sin 0)$	5,1	$z'_x=3x^2y^2+1$; $z'_y=2yx^3+1$	А	-0,5 e^2 -3,5
8	$4(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$	25/9	$z'_x=3y^2+2y$; $z'_y=6xy+2x$	А	0
9	$6(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$	0,36	$z'_x=3x^2y^2+2y$; $z'_y=2yx^3+2x$	В	$\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}$
10	$2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$	0,005	$z'_x=3y^2-1$; $z'_y=6xy+2y$	Г	$2e(\ln 2e-1)$

ФИО студентов	Сформированность ОК, ПК																		Оценка за выполнение тестовых заданий	Итоговая оценка
	ОК 1	ОК 2	ОК 3	ОК 4	ОК 5	ОК 12	ПК 1.2	ПК 1.3	ПК 1.4	ПК 1.5	ПК 1.7	ПК 2.1	ПК 2.2	ПК 2.3	ПК 2.4	ПК 2.5	ПК 2.8	ПК 3.1		

ФИО студентов	Сформированность ОК, ПК																Оценка за выполнение тестовых заданий	Итоговая оценка
	ПК 3.2	ПК 3.3	ПК 3.4	ПК 3.5	ПК 3.7	ПК 4.1	ПК 4.2	ПК 4.3	ПК 4.4	ПК 4.5	ПК 4.6	ПК 4.9	ПК 6.1	ПК 6.2	ПК 6.3	ПК 6.4		